2025 年新高考 1 卷压轴题的不求导优雅解法

2025-06-07 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_1703db4cc8c8422a

题目：

若存在实数 φ，使得对任意实数 x，都有

$5\cos x-\cos(5x+\varphi)\le b.$

求 b 的最小值.

解答（PDF 中已展开）

解答：

一方面，不妨设 $\varphi\in[0,2\pi)$. 取 $x=\dfrac{\pi-\varphi}{6}\in(-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{6}]$，可得

$\cos(5x+\varphi)=\cos\dfrac{5\pi+\varphi}{6}=-\cos x$

于是 $5\cos x-\cos(5x+\varphi)=6\cos x\ge 3\sqrt{3}.$

故 $b\ge 3\sqrt{3}.$

另一方面，取 $\varphi=0$，记 $t=\cos x$，则

$$\begin{aligned}&(5\cos x-\cos(5x+\varphi))^2\\=&(5t-(16t^5-20t^3+5t))^2\\=&\frac{2^{10}}{9}\cdot t^2\cdot t^2\cdot t^2\cdot(\frac{15}{8}-\frac{3}{2}t^2)\cdot(\frac{15}{8}-\frac{3}{2}t^2)\\\le&\frac{2^{10}}{9}\cdot\left(\frac{3\cdot t^2+2\cdot(\frac{15}{8}-\frac{3}{2}t^2)}{5}\right)^5\\=&27\end{aligned}$$

即 $5\cos x-\cos(5x+\varphi)\le 3\sqrt{3}$，因此 $b=3\sqrt{3}$ 满足题意.

综上，b 的最小值为 $3\sqrt{3}.$

单看第三问，还是很适合作为一道一试题的。其它就先不评论了，希望各位考生稳住心态，后面的考试继续加油！