2023 年基辅数学奥林匹克（第一轮）

2024-01-12　原文链接

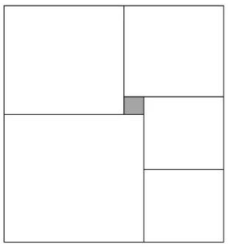
网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_1797f585c375439a

2023 年基辅数学奥林匹克（第一轮）

程国根　译

七年级组

1. 如图所示，矩形被分割成了 6 个正方形．已知中间的灰色正方形边长为 1，求矩形的面积．



2. 任给 $n \geq 3$ 个互异的实数，求证：其中必存在三个实数之和为正，或两个实数之和为负．

3. 求证：不存在正整数 k 和 n，使得

$$n^n + (n+1)^{n+1} + (n+2)^{n+2} = 2023^k.$$

4. 给定正整数 $n \geq 2$，考虑 $n \times n$ 方格网中每个小方格的中心．至多能从中选取多少个点，使得不存在三点构成直角三角形?

八年级组

1. 求最接近以下表达式值的整数：

$$((7+\sqrt{48})^{2023}+(7-\sqrt{48})^{2023})^2-((7+\sqrt{48})^{2023}-(7-\sqrt{48})^{2023})^2.$$

2. 正整数 k 和 n 满足 $3 \leq k \leq n$，任给 $n \geq 3$ 个互异的实数，求证：其中必存在 k 个实数之和为正，或 $k-1$ 个实数之和为负.

3. 给定一个三边长分别为 a, b, c 的三角形，以三角形的每个顶点为圆心各作一个圆. 已知在三角形的内部存在一点，从这点出发沿直线行走可以到达三角形的每一条边，而不与任意一个圆相交（可以相切）. 求这三个圆的直径之和的最大可能值.

4. 称一对正整数 $\overline{a_1a_2\cdots a_k}$ 和 $\overline{b_1b_2\cdots b_k}$ 是 k-相似的，如果它们的数码 $a_1, a_2, \cdots, a_k, b_1, b_2, \cdots, b_k$ 互不相同，且存在不同的正整数 m, n，使得下面的等式成立：

$$a_1^m + a_2^m + \ldots + a_k^m = b_1^n + b_2^n + \ldots + b_k^n$$

使得存在 k 相似的两个数的最大的 k 是多少?

5. 给定正整数 $n \geq 3$，考虑 $n \times n$ 方格网中每个小方格的中心. 至多能从中选取多少个点，使得不存在四点构成凸四边形?

九年级组

1. 求最接近以下表达式值的整数：

$$\left((3+\sqrt{1})^{2023}-\left(\frac{1}{3-\sqrt{1}}\right)^{2023}\right)\left((3+\sqrt{2})^{2023}-\left(\frac{1}{3-\sqrt{2}}\right)^{2023}\right)$$
$$\cdots\left((3+\sqrt{8})^{2023}-\left(\frac{1}{3-\sqrt{8}}\right)^{2023}\right).$$

2. 非零实数 a,b,c 满足条件 $ab+bc+ca=0$. 求证：$a+b+c$ 和 $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}$ 同时为正或同时为负.

3. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$. 设 W_A,W_B 分别为 $\angle A,\angle B$ 的角平分线和 $\triangle ABC$ 外接圆的另一个交点，N_A,N_B 分别为 W_A,W_B 的对径点. 设 N_AW_B,N_BW_A 分别和 AB 交于点 P,Q. 求证：$AP=BQ$.

4. 同八年级组第 5 题.

5. 在笛卡尔坐标平面上是否存在一个凸 2023 边形，其每个顶点都为整点，且所有边的长度均相等?

十年级组

1. 求所有满足以下不等式的正整数 n：

$$-46 \leq \frac{2023}{46-n} \leq 46-n.$$

2. 对任意给定的实数 a, b, c，解方程组：

$$\begin{cases} ax^3 + by = cz^5, \\ az^3 + bx = cy^5, \\ ay^3 + bz = cx^5. \end{cases}$$

3. 考虑笛卡尔坐标平面上所有相异整点对 (A, B). 对哪些整点对 (A, B)，平面上存在另两个整点 X, Y，使得四边形 $AXBY$ 为凸的圆内接四边形?

4. 正整数 m, n 满足 $9 \mid mn$，$27 \nmid mn$. 将一个 $m \times n$ 的矩形划分成若干个  形（可以旋转，一共 4 种不同形式）. 是否存在一种划分方法，使得存在某种形式的  形，其个数恰为完全平方数?

5. 同九年级组第 5 题.

十一年级组

1. 比较大小：$A=\dfrac{1}{9}:\sqrt[3]{\dfrac{1}{2023}}$，$B=\log_{2023}91125$.

2. 给定 $n\geq 4$ 个正实数，考虑它们两两之和．求证：在这 $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 个和中，存在两个数，它们之比（大比小）不超过 $\sqrt[n-2]{2}$.

3. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB<AC$，I 为内心．点 X 在 $\angle ABC$ 的外角平分线上，满足 $IC=IX$．$\triangle BXC$ 的外接圆在点 X 处的切线交 AB 于点 Y．求证：$AC=AY$.

4. 求所有正整数组 (m,n)，使得 2^n-13^m 为完全立方数.

5. 在一个遥远的星系中，有 225 个有人居住的行星，其中一些行星对之间有双向空间通道，且可以从任意一个行星到达另一个行星（可能需要多次中转）．行星的影响力是指与该行星有空间通道连接的其他行星的数量．已知如果两颗行星之间没有空间通道连接，则它们的影响力不同．在这种情况下，空间通道条数的最小可能值是多少?

2023 年基辅数学奥林匹克（第一轮）

程国根　译

七年级组

1. 如图所示，矩形被分割成了 6个正方形．已知中间的灰色正方形边长为 1，求矩形的面积.

2. 任给 $n\ge 3$个互异的实数，求证：其中必存在三个实数之和为正，或两个实数之和为负.

3. 求证：不存在正整数 k和 n，使得 $$n^n+(n+1)^{n+1}+(n+2)^{n+2} = 2023^k.$$

4. 给定正整数 $n\ge 2$，考虑 $n\times n$方格网中每个小方格的中心．至多能从中选取多少个点，使得不存在三点构成直角三角形?

八年级组

1. 求最接近以下表达式值的整数：$$((7 + \sqrt{48})^{2023} + (7 - \sqrt{48})^{2023})^2 - ((7 + \sqrt{48})^{2023} - (7 - \sqrt{48})^{2023})^2.$$

2. 正整数 k和 n满足 $3\le k\le n$，任给 $n\ge 3$个互异的实数，求证：其中必存在 k个实数之和为正，或 $k-1$个实数之和为负.

3. 给定一个三边长分别为 a,b,c的三角形，以三角形的每个顶点为圆心各作一个圆．已知在三角形的内部存在一点，从这点出发沿直线行走可以到达三角形的每一条边，而不与任意一个圆相交（可以相切）．求这三个圆的直径之和的最大可能值.

4. 称一对正整数 $\overline{a_{1}a_{2}\cdots a_{k}}$和 $\overline{b_{1}b_{2}\cdots b_{k}}$是 k-相似的，如果它们的数码 $a_1, a_2, \cdots, a_k , b_1 , b_2, \cdots, b_k$互不相同，且存在不同的正整数 m,n，使得下面的等式成立：$$a_1^m + a_2^m + \ldots + a_k^m = b_1^n + b_2^n + \ldots + b_k^n$$使得存在 k相似的两个数的最大的 k是多少?

5. 给定正整数 $n\ge 3$，考虑 $n\times n$方格网中每个小方格的中心．至多能从中选取多少个点，使得不存在四点构成凸四边形?

九年级组

1. 求最接近以下表达式值的整数：$$\begin{aligned}&\left((3 + \sqrt{1})^{2023} - \left(\frac{1}{3 - \sqrt{1}}\right)^{2023} \right)\left((3 + \sqrt{2})^{2023} - \left(\frac{1}{3 - \sqrt{2}}\right)^{2023} \right)\\&\cdots\left((3 + \sqrt{8})^{2023} - \left(\frac{1}{3 - \sqrt{8}}\right)^{2023} \right).\end{aligned}$$

2. 非零实数 a,b,c满足条件 $ab+bc+ca=0$. 求证：$a+b+c$和 $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}$同时为正或同时为负.

3. 在 $\triangle ABC$中，$\angle ACB=90^{\circ}$. 设 W_{A},W_{B}分别为 $\angle A,\angle B$的角平分线和 $\triangle ABC$外接圆的另一个交点，N_{A},N_{B}分别为 W_{A},W_{B}的对径点. 设 $N_{A}W_{B},N_{B}W_{A}$分别和 AB交于点 P,Q. 求证：$AP=BQ$.

4. 同八年级组第 5 题.

5. 在笛卡尔坐标平面上是否存在一个凸 2023边形，其每个顶点都为整点，且所有边的长度均相等?

十年级组

1. 求所有满足以下不等式的正整数 n：$$-46 \leq \frac{2023}{46-n} \leq 46-n.$$

2. 对任意给定的实数 a,b,c，解方程组：$$\begin{cases}ax^{3}+by=cz^{5},\\az^{3}+bx=cy^{5},\\ay^{3}+bz=cx^{5}.\end{cases}$$

3. 考虑笛卡尔坐标平面上所有相异整点对 (A,B). 对哪些整点对 (A,B)，平面上存在另两个整点 X,Y，使得四边形 $AXBY$为凸的圆内接四边形?

4. 正整数 m,n满足 $9\mid mn$，$27\nmid mn$. 将一个 $m\times n$的矩形划分成若干个

此处原为 TikZ 作图，源码照录（浏览器不渲染 TikZ）

```
\vcenter{\hbox{\begin{tikzpicture}[scale=0.3]\tkzInit[ymin=-0.1,ymax=2.1,xmin=-0.1,xmax=2.1]\tkzClip\tkzDefPoints{0/0/A,1/0/B,2
↪ /0/C,0/1/D,1/1/E,2/1/F,0/2/G,1/2/H}\tkzDrawSegments(A,C D,F G,H A,G B,H C,F)\end{tikzpicture}}}
```

形（可以旋转，一共 4种不同形式）. 是否存在一种划分方法，使得存在某种形式的

此处原为 TikZ 作图，源码照录（浏览器不渲染 TikZ）

```
\vcenter{\hbox{\begin{tikzpicture}[scale=0.3]\tkzInit[ymin=-0.1,ymax=2.1,xmin=-0.1,xmax=2.1]\tkzClip\tkzDefPoints{0/0/A,1/0/B,2
↪ /0/C,0/1/D,1/1/E,2/1/F,0/2/G,1/2/H}\tkzDrawSegments(A,C D,F G,H A,G B,H C,F)\end{tikzpicture}}}
```

形，其个数恰为完全平方数?

5. 同九年级组第 5 题.

十一年级组

1. 比较大小：$A = \frac{1}{9} : \sqrt[3]{\frac{1}{2023}}$，$B = \log_{2023} 91125$.

2. 给定 $n\ge 4$个正实数，考虑它们两两之和. 求证：在这 $\frac{n(n-1)}{2}$个和中，存在两个数，它们之比（大比小）不超过 $\sqrt[n-2]{2}$.

3. 在 $\triangle ABC$中，$AB<AC$，I为内心. 点 X在 $\angle ABC$的外角平分线上，满足 $IC=IX$. $\triangle BXC$的外接圆在点 X处的切线交 AB于点 Y. 求证：$AC=AY$.

4. 求所有正整数组 (m,n)，使得 $2^{n}-13^{m}$为完全立方数.

5. 在一个遥远的星系中，有 225个有人居住的行星，其中一些行星对之间有双向空间通道，且可以从任意一个行星到达另一个行星（可能需要多次中转）. 行星的影响力是指与该行星有空间通道连接的其他行星的数量. 已知如果两颗行星之间没有空间通道连接，则它们的影响力不同. 在这种情况下，空间通道条数的最小可能值是多少?

解答（PDF 中已展开）

```
\section*{2023 年基辅数学奥林匹克（第一轮）}\flushright 程国根\quad 译\section*{七年级组}
```

\ex 如图所示，矩形被分割成了6个正方形．已知中间的灰色正方形边长为1，求矩形的面积．
↪ \begin{center}\includegraphics[scale=0.3]{基辅P1.png}\end{center}\vfill\ex 任给$n\ge 3$个互异的实数，求证：
↪ 其中必存在三个实数之和为正，或两个实数之和为负．\vfill\ex 求证：不存在正整数k和n，
↪ 使得$$n^n+(n+1)^{n+1}+(n+2)^{n+2} = 2023^k.$$\vfill\ex 给定正整数$n\ge 2$，考虑$n\times n$方格网中每个小方格的中心．
↪ 至多能从中选取多少个点，使得不存在三点构成直角三角形？\vfill\newpage\section*{八年级组}\setcounter{ex}{0}\ex
↪ 求最接近以下表达式值的整数：$$((7 + \sqrt{48})^{2023} + (7 - \sqrt{48})^{2023})^2 - ((7 + \sqrt{48})^{2023} - (7 -
↪ \sqrt{48})^{2023})^2.$$\vfill\ex 正整数k和n满足$3\le k\le n$，任给$n\ge 3$个互异的实数，求证：
↪ 其中必存在k个实数之和为正，或$k-1$个实数之和为负．\vfill\ex 给定一个三边长分别为a,b,c的三角形，
↪ 以三角形的每个顶点为圆心各作一个圆．已知在三角形的内部存在一点，从这点出发沿直线行走可以到达三角形的每一条边，
↪ 而不与任意一个圆相交（可以相切）．求这三个圆的直径之和的最大可能值．\vfill\ex 称一对正整数$\overline{a_{1}a_{2}\cdots
↪ a_{k}}$和$\overline{b_{1}b_{2}\cdots b_{k}}$是$k$-相似的，如果它们的数码$a_1, a_2, \cdots, a_k , b_1 , b_2, \cdots,
↪ b_k$互不相同，且存在不同的正整数$m,n$，使得下面的等式成立：$$a_1^m + a_2^m + \ldots + a_k^m = b_1^n + b_2^n +
↪ \ldots + b_k^n$$使得存在k相似的两个数的最大的k是多少？\vfill\ex 给定正整数$n\ge 3$，考虑$n\times
↪ n$方格网中每个小方格的中心．至多能从中选取多少个点，使得不存在四点构成凸四边形？
↪ \vfill\newpage\section*{九年级组}\setcounter{ex}{0}\ex 求最接近以下表达式值的整数：\begin{small}$$\begin{aligned}&\left((3
↪ + \sqrt{1})^{2023} - \left(\frac{1}{3 - \sqrt{1}}\right)^{2023} \right)\left((3 + \sqrt{2})^{2023} - \left(\frac{1}{3 -
↪ \sqrt{2}}\right)^{2023} \right)\\&\cdots\left((3 + \sqrt{8})^{2023} - \left(\frac{1}{3 - \sqrt{8}}\right)^{2023}
↪ \right).\end{aligned}$$\end{small}\vfill\ex 非零实数a,b,c满足条件$ab+bc+ca=0$．求证：
↪ $a+b+c$和$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}$同时为正或同时为负．\vfill\ex 在$\triangle ABC$中，$\angle
↪ ACB=90^{\circ}$．设$W_{A},W_{B}$分别为$\angle A,\angle B$的角平分线和$\triangle ABC$外接圆的另一个交点，
↪ N_{A},N_{B}分别为W_{A},W_{B}的对径点．设$N_{A}W_{B},N_{B}W_{A}$分别和AB交于点P,Q．求证：$AP=BQ$．
↪ \vfill\ex 同八年级组第5题．\vfill\ex 在笛卡尔坐标平面上是否存在一个凸2023边形，其每个顶点都为整点，
↪ 且所有边的长度均相等？\vfill \newpage\section*{十年级组}\setcounter{ex}{0}\ex 求所有满足以下不等式的正整数n：$$-46
↪ \leq \frac{2023}{46-n} \leq 46-n.$$\vfill\ex 对任意给定的实数a,b,c，解方程组：
↪ $$\begin{cases}ax^{3}+by=cz^{5},\\az^{3}+bx=cy^{5},\\ay^{3}+bz=cx^{5}.\end{cases}$$\vfill\ex
↪ 考虑笛卡尔坐标平面上所有相异整点对(A,B)．对哪些整点对(A,B)，平面上存在另两个整点X,Y，
↪ 使得四边形$AXBY$为凸的圆内接四边形？\vfill\ex 正整数m,n满足$9\mid mn$，$27\nmid mn$．将一个$m\times
↪ n$的矩形划分成若干个此处原为 TikZ 作图，源码照录（浏览器不渲染 TikZ）
↪ \vcenter{\hbox{\begin{tikzpicture}[scale=0.3]\tkzInit[ymin=-0.1,ymax=2.1,xmin=-0.1,xmax=2.1]\tkzClip\tkzDefPoints{0/0/A,1/」
↪ 0/B,2/0/C,0/1/D,1/1/E,2/1/F,0/2/G,1/2/H}\tkzDrawSegments(A,C D,F G,H A,G B,H C,F)\end{tikzpicture}}}

形（可以旋转，一共 4种不同形式）．是否存在一种划分方法，使得存在某种形式的

此处原为 TikZ 作图，源码照录（浏览器不渲染 TikZ）

\vcenter{\hbox{\begin{tikzpicture}[scale=0.3]\tkzInit[ymin=-0.1,ymax=2.1,xmin=-0.1,xmax=2.1]\tkzClip\tkzDefPoints{0/0/A,1/0/B,2」
↪ /0/C,0/1/D,1/1/E,2/1/F,0/2/G,1/2/H}\tkzDrawSegments(A,C D,F G,H A,G B,H C,F)\end{tikzpicture}}}

形，其个数恰为完全平方数？\vfill\ex 同九年级组第 5 题．\vfill \newpage\section*{十一年级组}\setcounter{ex}{0}\ex 比较大小：$A = \frac{1}{9} : \sqrt[3]{\frac{1}{2023}}$，$B = \log _{2023} 91125$．\vfill\ex 给定 $n\ge 4$个正实数，考虑它们两两之和．求证：在这 $\frac{n(n-1)}{2}$个和中，存在两个数，它们之比（大比小）不超过 $\sqrt[n-2]{2}$．\vfill\ex 在 $\triangle ABC$中，$AB<AC$，I为内心．点 X在 $\angle ABC$的外角平分线上，满足 $IC=IX$．$\triangle BXC$的外接圆在点 X处的切线交 AB于点 Y．求证：$AC=AY$．\vfill\ex 求所有正整数组 (m,n)，使得 $2^{n}-13^{m}$为完全立方数．\vfill\ex 在一个遥远的星系中，有 225个有人居住的行星，其中一些行星对之间有双向空间通道，且可以从任意一个行星到达另一个行星（可能需要多次中转）．行星的影响力是指与该行星有空间通道连接的其他行星的数量．已知如果两颗行星之间没有空间通道连接，则它们的影响力不同．在这种情况下，空间通道条数的最小可能值是多少？\vfill