一道清华强基不等式问题的解答和推广

2021-07-03 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_1891a82c1a572b67

2021 年清华大学强基考试的第 7 题如下：

题目 1 已知 $a,b,c\geq 0$，$a+b+c=1$，求

$$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$$

的最大值.

先进行因式分解：

$$\begin{aligned}&a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)\\=&(a-b)(b-c)(a-c)\end{aligned}$$

齐次化后变为如下问题：

题目 2 已知 $a,b,c\geq 0$，求最小的正实数 k，使得不等式

$$|(a-b)(b-c)(c-a)|\leq k(a+b+c)^3$$

恒成立.

首先对 a，b，c 进行排序，从而去掉绝对值符号．由不等式的对称性可不妨设 $a\leq b\leq c$.

另外可以注意到，在上述不等式中，如果将 a，b，c 同时减去一个不大于 a 的非负数，不等式的左边不变，右边不增．所得的新不等式比原不等式更强.

于是可将 a，b，c 替换成 0，$b-a$，$c-a$，再将 $b-a$，$c-a$ 视作整体.（事实上，这样的操作等同于令 $a=0$）此时不等式变为

$$bc(c-b)\leq k(b+c)^3.$$

再进行齐次化，设 $c=bx$（$b=0$ 不等式显然成立），可得：

$$x(x-1)\leq k(x+1)^3.$$

即求最小的正实数 k，使得 $x(x-1)\leq k(x+1)^3$ 对任意 $x\geq 1$ 恒成立.

设 $f(x)=\dfrac{x(x-1)}{(x+1)^3}$，则 $k\geq f(x)_{\max}$．由于

$$f'(x)=-\frac{x^2-4x+1}{(x+1)^4}$$

于是 $f(x)$ 在 $(1,2+\sqrt{3})$ 递增，在 $(2+\sqrt{3},+\infty)$ 递减. 即

$$f(x)_{\max}=f(2+\sqrt{3})=\frac{\sqrt{3}}{18}.$$

由此可知 k 的最小值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{18}$.

故原题的答案也为 $\dfrac{\sqrt{3}}{18}$.

此方法在问题复杂时能起到更显著的效果. 如下题:

题目 3 已知 $a,b,c\geq 0$，求最大的正实数 k，使得不等式

$$(a+b+c)^5\geq k(ab+bc+ca)(a-b)(b-c)(c-a)$$

恒成立.

分析仿照之前，先令 $a=0$，$c=bx$，可得

$$(x+1)^5\geq kx^2(x-1).$$

故要考虑 $f(x)=\dfrac{(x+1)^5}{x^2(x-1)}$ 的极值.

由于 $f'(x)=\dfrac{2(x+1)^4(x^2-3x+1)}{x^3(x-1)^2}$，极值点为 $\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$，验证即得 $k=25\sqrt{5}$，此时 $(a,b,c)=(0,\sqrt{5}-1,\sqrt{5}+1)$.

详细解答过程如下:

解答（PDF 中已展开）

解答不妨设 $a\leq b\leq c$，当 $a=0$，$b=\sqrt{5}-1$，$c=\sqrt{5}+1$ 时，有 $k\leq 25\sqrt{5}$. 下证:

$$(a+b+c)^5\geq 25\sqrt{5}(ab+bc+ca)(a-b)(b-c)(c-a)$$

注意到

$$\begin{aligned}&(ab+bc+ca)(bc-ca)(bc-ab)\\ \leq&\left(\frac{(ab+bc+ca)+(bc-ca)+(bc-ab)}{3}\right)^3\\ =&b^3c^3\end{aligned}$$

即

$$(ab+bc+ca)(c-a)(b-a)\leq b^2c^2$$

故只需证

$$(a+b+c)^5 \geq 25\sqrt{5}b^2c^2(c-b)$$

由均值不等式：

$$\begin{aligned}
&b^2c^2(c-b)\\
=&\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}b\right)^2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}c\right)^2(c-b)\\
\leq&\left(\frac{(\sqrt{5}+1)b+(\sqrt{5}-1)c+(c-b)}{5}\right)^5\\
=&\frac{(b+c)^5}{25\sqrt{5}}\\
\leq&\frac{(a+b+c)^5}{25\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

证毕.

练习 1 已知 $a,b,c\geq 0$，求最大的正实数 k，使得不等式

$$(a+b+c)^5 \geq k(a^2+b^2+c^2)(a-b)(b-c)(c-a)$$

恒成立.

练习 2 已知 $a,b,c\geq 0$，求最大的正实数 k，使得不等式

$$(a^2+b^2+c^2)^3 \geq k(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2$$

恒成立.

练习 3 已知 $a,b,c\geq 0$，求最大的正实数 k，使得不等式

$$(a+b+c)^6 \geq k(a^3+b^3+c^3)(a-b)(b-c)(c-a)$$

恒成立.