一道复数方程组问题

2021-12-30 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_1936eebca6e993fb

题目： 求所有的正整数 n 使方程组

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x^2+y^2+z^2=3 \\ x^n+y^n+z^n=3 \end{cases}$$

在复数范围内有唯一解.

解答（PDF 中已展开）

解答： 显然方程组有解 $(x,y,z)=(1,1,1)$.

当 $n=1$、2 时，容易知道 $(x,y,z)=\left(2,1+\omega,1+\omega^2\right)\left(\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)$ 也是方程组的解.

对于 $n\geqslant 3$，如果 (x,y,z) 是方程组的解，那么 x、y、z 是多项式 $p(X)=X^3-\sigma_1X^2+\sigma_2X-\sigma_3$ 的根, 其中

$$\begin{cases} \sigma_1=x+y+z=3 \\ \sigma_2=xy+yz+zx=\dfrac{1}{2}\left((x+y+z)^2-\left(x^2+y^2+z^2\right)\right)=3 \\ \sigma_3=xyz \end{cases}$$

所以 $p(X)=X^3-3X^2+3X-\sigma_3$.

设 $s_n=x^n+y^n+z^n$. 由 $p(x)=x^3-3x^2+3x-\sigma_3=0$，得 $x^3=3x^2-3x+\sigma_3$，同理可得 $y^3=3y^2-3y+\sigma_3$，$z^3=3z^2-3z+\sigma_3$. 故

$$\begin{aligned} s_3&=3\left(x^2+y^2+z^2\right)-3(x+y+z)+3\sigma_3=3\sigma_3, \\ s_4&=3\left(x^3+y^3+z^3\right)-3\left(x^2+y^2+z^2\right)+3\sigma_3(x+y+z)=12\sigma_3-9, \end{aligned}$$

同理可得 $s_5=30\sigma_3-27$.

故由 $s_3=3$，$s_4=3$，$s_5=3$ 均可得到 $\sigma_3=1$，此时 $p(X)=(X-1)^3$ 只有唯一解 $x=y=z=1$.

设 $n\geqslant 6$，$m=\left[\frac{n}{3}\right]$，注意到 $m\geqslant 2$，选取多项式

$$q_n(X)=\mathrm{C}_n^{3m}X^{m-1}+\mathrm{C}_n^{3m-3}X^{m-2}+\cdots+\mathrm{C}_n^6X+\mathrm{C}_n^3$$

的一个复数根 r，取满足条件 $\rho^3=r$ 的 ρ.

我们证明 $x=1+\rho$、$y=1+\omega\rho$，$z=1+\omega\rho^2$ 也是方程组的一组解.

显然，$x+y+z=3+\rho\left(1+\omega+\omega^2\right)=3$，同样 $x^2+y^2+z^2=3$. 易知

$$
\begin{aligned}
&1+\omega^k+\omega^{2k}=3 \quad (k\equiv 0 \pmod 3),\\
&1+\omega^k+\omega^{2k}=0 \quad (k\equiv 1、2 \pmod 3),\\
&x^n+y^n+z^n=(1+\rho)^n+(1+\rho\omega)^n+\left(1+\rho\omega^2\right)^n\\
&\qquad\quad =3+\sum_{k=1}^{n}\mathrm{C}_n^k\rho^k\left(1+\omega^k+\omega^{2k}\right)\\
&\qquad\quad =3+3\sum_{j=1}^{m}\mathrm{C}_n^{3j}\rho^{3j}=3+3rq_n(r)=3.
\end{aligned}
$$

于是，所有的 n 为 3、4、5.