函数有三个零点——解答

2023-03-12 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_195850172043a477

题目来源：

九章 VectorAB

> 对任意的 $\theta\in(0,\pi)$，证明：函数 $F(x)=(x^3-3x)\sin\theta+(3x^2-1)\cos\theta$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上都有三个零点.

解答（PDF 中已展开）

证明：

若 $\cos\theta=0$，则 $F(x)=x^3-3x$，有三个零点：0，$\pm\sqrt{3}$.

若 $\cos\theta\neq0$，由

$$F(-2)=-2\sin\theta+11\cos\theta,F(-1)=2\sin\theta+2\cos\theta,F(0)=-\cos\theta$$

$$F(1)=-2\sin\theta+2\cos\theta,F(2)=2\sin\theta+11\cos\theta$$

可知：

$$F(-2)+F(-1)+13F(0)=0,13F(0)+F(1)+F(2)=0$$

又 $F(0)\neq0$，故 $F(x)$ 在 $[-2,0)$，$(0,2]$ 上各至少有一个零点. 下证：$F(x)$ 无重根.

若不然，设 $F(x)$ 的三个根为 a，a，b.

由韦达定理：

$$\begin{cases}a+a+b=-3\cdot\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\\a^2+ab+ab=-3\\a^2b=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\end{cases}$$

于是 $2a+b+3a^2b=0$ 即 $b=\dfrac{-2a}{3a^2+1}=\dfrac{-(a^2+3)}{2a}$.

因此 $4a^2=(a^2+3)(3a^2+1)$，即 $3(a^2+1)^2=0$，矛盾.

于是 $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有三个不同零点.