2022 年波罗的海之路数学竞赛

2022-11-15　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_195ca586d7e33613

1. 函数 $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ 满足对任意 $x \in \mathbb{R}^+$，都有 $f(x^3) = f(x)^3$，$f(2x) = f(x)$. 求 $f(\sqrt[2022]{2})$ 的所有可能值.

2. 自然数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_0 = a_1 = a_2 = 1$，且对任意 $n \geq 3$，$a_n = \left\lfloor \dfrac{n}{a_{n-1}a_{n-2}a_{n-3}} \right\rfloor$. 求 a_{2022} 的值.

3. 称二元多项式 $P(x,y)$ 是“秘密单变量”的，如果存在多项式 $Q(x)$ 和 $R(x,y)$，满足 $\deg(Q) \geq 2$，$P(x,y) = Q(R(x,y))$（例如：x^2+1 和 x^2y^2+1 都是“秘密单变量”的，而 $xy+1$ 不是）. 证明或证否以下结论：若多项式 $P(x,y)$ 满足 $P(x,y)$ 和 $P(x,y)+1$ 均能写为两个非常数多项式之积，则 P 为“秘密单变量”的.
注：本题中所有多项式均为实系数多项式.

4. 正实数 x，y，z 满足 $xy + yz + zx = 1$. 求证：

$$2(x^2+y^2+z^2) + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{y^2+1} + \frac{1}{z^2+1}\right) \geq 5.$$

5. 求所有函数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，满足 $f(0)+1 = f(1)$，且对任意实数 x 和 y，都有

$$f(xy-x) + f(x+f(y)) = yf(x) + 3.$$

6. Mattis 正在举办一场有 40 名球员参加的羽毛球比赛，有 20 个球场，编号从 1 到 20，每个球场有 2 名球员. 在每一轮比赛中，每个球场都会决出一个赢家. 之后，在 1 号球场输掉比赛的选手和在 20 号球场赢的选手保持原位. 对于剩下的 38 名选手，i 号球场的胜者移到 $i+1$ 号球场，败者移到 $i-1$ 号球场. 然后进行下一轮比赛，直到每个选手至少与其他选手交手一次. 至少要持续多少轮比赛?

7. 作家 Arthur 有 $n \geq 1$ 个与他一起写书的合著者. 每本书都有一个包括 Arthur 本人在内的作者名单，没有两本书的作者是完全相同的. 在一次与所有合著者的聚会上，每个合著者都在纸条上写下了他们所记得的与 Arthur 一起写过的书的数量. 检查纸条上的数字，他们发现写下的数字是前 n 个斐波那契数（由 $F_1 = F_2 = 1$ 和 $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$ 定义）. 求所有的正整数 n，使得存在所有合著者写下的数字均是无误的可能.

8. 对正整数 $n \geq 3$，在一个不自交的 n 边形（不一定是凸的）中作 $n-3$ 条内对角线，将这个 n 边形分割成 $n-2$ 个三角形. 已知这些三角形所有内角的度数均为整数（单位为 °），且任意两个内角度数均不相等. 求 n 的最大可能值.

9. 五位长老正围坐在一个大篝火旁. 他们知道 Oluf 会把四种颜色（红、绿、蓝、黄）中的一种帽子戴在每个长老的头上，经过短暂的沉默思考后，每个长老必须在一张纸上写下这四

种颜色中的一种．每位长者只能看到他们两个邻居的帽子的颜色，不能看到自己帽子的颜色，也不能看到其余两位长者的帽子的颜色，而且在 Oluf 开始戴上帽子后，他们也不能交流．

证明：长老们可以提前设计一个策略，使最多两个长老最终写下自己帽子的颜色．

10. 称自然数 a 包含在自然数 b 中，如果可以通过擦除 b 中的一些数字（在它们的十进制表示中）来获得 a．例如，123 包含在 901523 中，但不包含在 3412 中．
是否存在一个无限大的自然数集合，使该集合中的任何数字都不包含在该集合的任何其他数字中?

11. 设 $\triangle ABC$ 的外接圆为 Γ，外心为 O．以直线 AB 上一点为圆心，且过点 A、O 的圆和 Γ 的另一个交点为 D．以直线 AC 上一点为圆心，且过点 A、O 的圆和 Γ 的另一个交点为 E．求证：BD 平行于 CE．

12. 锐角 $\triangle ABC$ 的三条高为 AD、BE、CF（D、E、F 分别在边 BC、CA、AB 上）．Q 为线段 AD 内部一点，设 $\triangle QDF$ 和 $\triangle QDE$ 的外接圆和 BC 的另一个交点分别为 X 和 Y．求证：$BX = CY$．

13. $ABCD$ 为圆内接四边形，$AB < BC$，$AD < DC$．E、F 分别为边 BC、CD 上点，满足 $AB = BE$，$AD = DF$．记 EF 的中点为 M，求证：$\angle BMD = 90^\circ$．

14. 设锐角 $\triangle ABC$ 的外接圆为 Γ，外心为 O，BC 中点为 M．设 AM 和 Γ 的另一个交点为 T，过 A 作 BC 的垂线与 Γ 的另一个交点为 D．设 DT 和 BC 交于点 X，P 为 $\triangle XDM$ 的外心．求证：$\triangle OPD$ 的外接圆过 XD 的中点．

15. $B \neq C$ 为圆 Ω 上的两个定点．对于 Ω 上第三个点 A，设 B 在 AC 上的射影为 X，C 在 AB 上的射影为 Y．求证：存在圆 Γ，使得不依赖于 A 在 Ω 上的位置，始终有 XY 和 Γ 相切．

16. 求所有函数 f：$\mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$，使得对于任意 a，$b \in \mathbb{Z}^+$，都有

$$f(a) + f(b) \mid (a+b)^2.$$

17. 设 n 为正整数，满足 n 的所有正约数之和不小于 $2022n$．求证：n 至少有 2022 个不同的素因子．

18. 求所有正整数对 (a, b)，满足 $a \leq b$，且对任意正整数 x，都有

$$\gcd(x, a)\gcd(x, b) = \gcd(x, 20)\gcd(x, 22).$$

19. 求所有三元非负整数组 (x, y, z)，使得

$$x^5 + x^4 + 1 = 3^y 7^z.$$

20. Ingrid 和 Erik 正在玩一个游戏. 对于一个给定的奇素数 p, 在黑板上写有数字 $1, 2, 3, \cdots, p-1$. 两人轮流执行操作，由 Ingrid 开始. 在每次操作中，由其中一个玩家擦去黑板上一个剩余的数字，如果操作后所有被擦去的数字之积模 p 的余数为 1，那么本次操作的一方就可以得到 1 分，否则就得 0 分. 在所有数字都被擦去后，游戏结束.
在游戏结束时，得到最多分数的一方获胜. 如果双方得分相同，游戏以平局结束. 对于每个 P，确定哪个玩家（如果有的话）有获胜的策略.

