阶乘与斐波那契数列

2022-01-27 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_19f2001daddd2f9e

前段时间有个读者问了一道题：

求所有的正整数 n，使得 $n!$ 能表示为两个斐波那契数之积.

这应该是前两年的一道国外赛题，具体出处记不太清了. 主要的想法是说明这样的 n 是有限的，可以通过质因子指数的估计和不等式放缩来证明. 当然，关于斐波那契数列的性质也需要熟悉.

解： 设斐波那契数列为 $\{F_n\}$：$F_1 = F_2 = 1$，$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. 先证明以下四个引理：

引理 1: $F_k \geq 1.6^{k-2}$.

引理 1 的证明： $F_1 = 1 > 1.6^{-1}$，

$F_2 = 1 = 1.6^0$.

若 $F_k \geq 1.6^{k-2}$，$F_{k+1} \geq 1.6k - 1$，则

$$\begin{aligned} F_{k+2} =& F_k + F_{k+1} \\ \geq& 1.6k - 2 + 1.6^{k-1} \\ =& 1.6^{k-2} \times 2.6 \\ >& 1.6^k \end{aligned}$$

引理 2: $F_{3k} = 5F_k^3 + 3 \cdot (-1)^k F_k$.

引理 2 的证明： 设 $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，$\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. 则

$$\begin{aligned} F_{3k} =& \frac{\alpha^{3k} - \beta^{3k}}{\sqrt{5}} \\ =& \frac{(\alpha^k - \beta^k)^3 + 3\alpha^k\beta^k(\alpha^k - \beta^k)}{\sqrt{5}} \\ =& 5\left(\frac{\alpha^k - \beta^k}{\sqrt{5}}\right)^3 + 3 \cdot (-1)^k \frac{\alpha^k - \beta^k}{\sqrt{5}} \\ =& 5F_k^3 + 3 \cdot (-1)^k F_k \end{aligned}$$

引理 3: 若 $3^t \mid F_k$，则 $4 \cdot 3^{t-1} \mid k$.

引理 3 的证明： 容易验证 $t = 1$ 和 $t = 2$ 时的情形. 若结论在 t 时成立（$t \geq 2$），考虑 $t+1$ 时的情况：

若 $3^{t+1} \mid F_k$，则 $3^t \mid F_k$，由归纳假设，有 $4 \cdot 3^{t-1} \mid k$. 设 $m = \dfrac{k}{3}$，则 m 为偶数. 则由引理 2:

$$F_k = F_{3m} = 5F_m^3 + 3F_m$$

由于 $3 \mid F_k$，故 $3 \mid F_m^3$，即 $3 \mid F_m$.

于是 $v_3(5F_m^3) > v_3(3F_m)$. 故

$$v_3(F_k) = v_3(3F_m) = v_3(F_m) + 1$$

由 $3^{t+1} \mid F_k$ 知 $3^t \mid F_m$，故 $4 \cdot 3^{t-1} \mid m$，即 $4 \cdot 3^t \mid k$. 证毕.

引理 4: $n \geq 12$ 时，$v_3(n!) > \dfrac{n}{3}$.

引理 4 的证明： $n > 14$ 时，

$$\begin{aligned} v_3(n!) =& \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{n}{3^k}\right] \\ \geq& \left[\frac{n}{3}\right] + \left[\frac{n}{9}\right] \\ \geq& \frac{n}{3} - \frac{2}{3} + \frac{n}{9} - \frac{8}{9} \\ =& \frac{n}{3} + \frac{n-14}{9} \\ \geq& \frac{n}{3} \end{aligned}$$

$n = 12$，13，14 时，也容易验证成立.

回到原题.

若 $n \geq 12$ 时，存在 k，$l \in \mathbb{N}_+$，使 $n! = F_k \cdot F_l$.

则 $4 \leq \dfrac{n}{3} < v_3(n!) = v_3(F_k F_l) = v_3(F_k) + v_3(F_l)$.

设 $v_3(F_k) = x$，$v_3(F_l) = y$，则有 $x + y \geq 5$，不妨设 $y \geq x$，则 $y \geq 3$.

则 $k \geq 4 \cdot 3^{x-1} = 3^x + 3^{x-1} \geq 3^x + 1$.

$l \geq 4 \cdot 3^{y-1} = 3^y + 3^{y-1} \geq 3^y + 9$.

所以

$$\begin{aligned} 2^{n(n-1)} > n^{n-1} > n! = F_k F_l \geq& 1.6^{3^x-1} \cdot 1.6^{3^y+7} \\ =& 1.6^{3^x+3^y+6} \geq 1.6^{2 \cdot 3^{\frac{x+y}{2}}+6} > 1.6^{2 \cdot 3^{\frac{n}{6}}+6} > 2^{3^{\frac{n}{6}}+3} \end{aligned}$$

因此 $n(n-1) > 3^{\frac{n}{6}+3}$，矛盾. 故 $n \leq 11$.

对 $1 \leq n \leq 11$ 的情况逐一验证可得：$n = 1$，2，3，4，6 符合题意. 其中

$$1! = 1 \times 1 = F_1 \cdot F_1$$

$$2! = 1 \times 2 = F_1 \cdot F_3$$

$$3! = 2 \times 3 = F_3 \cdot F_4$$

$$4! = 3 \times 8 = F_4 \cdot F_6$$

$$6! = 5 \times 144 = F_5 \cdot F_{12}$$

最后的放缩比较宽松，所以得到的范围还是挺大的，可以估计得更细一些，减少枚举量（毕竟 11! 太大了）.

文章最后再放一道相关题目，也是用质因子的指数来估计范围，从而证明一个不定方程只有有限组解.

（2019 年 IMO）求所有正整数对 (k, n)，满足 $k! = (2^n - 1)(2^n - 2) \cdots (2^n - 2^{n-1})$.