难倒很多人的最值问题，其实很简单

2023-10-21 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_1afb1d99f4c65018

题目（来源：难倒很多人的最值问题 2）

已知 k 为正常数，a,b 为正实数，若 $a+k^2b=a^2b^3$，求 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{2k^2b}$ 的最小值.

解答（PDF 中已展开）

解答：

对条件式进行变形：

$$\begin{aligned}&a+k^2b=a^2b^3\\ \iff&\frac{k^2}{a}+\frac{1}{b}=ab^2\\ \iff&\frac{k\sqrt{k}}{a}+\frac{1}{\sqrt{k}b}=\frac{a}{k\sqrt{k}}\cdot(\sqrt{k}b)^2\end{aligned}$$

设 $x=\dfrac{k\sqrt{k}}{a}$，$y=\dfrac{1}{\sqrt{k}b}$，则条件变为

$$x+y=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y^2}\iff x^2y^2+xy^3=1$$

待求最小值式

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{2k^2b}=\frac{1}{k\sqrt{k}}\left(x+\frac{y}{2}\right)$$

由

$$\begin{aligned}&\left(x+\frac{y}{2}\right)^4-(x^2y^2+xy^3)\\ =&\frac{(4x^2+4xy-y^2)^2}{16}\geq 0\end{aligned}$$

知

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{2k^2b}=\frac{1}{k\sqrt{k}}\left(x+\frac{y}{2}\right)\geq\frac{1}{k\sqrt{k}}$$

当且仅当 $x=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$，$y=\sqrt{2}$，即 $a=(2+\sqrt{2})k\sqrt{k}$，$b=\dfrac{1}{\sqrt{2k}}$ 时，等号成立，故 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{2k^2b}$ 的最小值为 $\dfrac{1}{k\sqrt{k}}$.