一分钟做不等式系列（16）——2026 年新疆预赛

2026-05-24　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_1b5dbc662ee64809

题目：（有改动，原题见文末）

已知 $n\geqslant 3$，$n\in\mathbb{N}_+$，且 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=2n$，$a_i\geqslant 0$，$i=1,2,\cdots,n$，求

$$f=\sum_{i=1}^{n-1}(a_i-1)(a_{i+1}-1)$$

的最大值和最小值.

解答（PDF 中已展开）

答案：

最大值为 $n^2-2n-\dfrac{3}{4}$，最小值为 $-3n-1$.

构造：

取 $a_1=n+\dfrac{1}{2}$，$a_2=n-\dfrac{1}{2}$，其余为 0，得 $f=n^2-2n-\dfrac{3}{4}$.

取 $a_2=2n$，其余为 0，得 $f=-3n-1$；

证明：

$$f=\sum_{i=1}^{n-1}(a_ia_{i+1}-a_i-a_{i+1}+1)=\sum_{i=1}^{n-1}a_ia_{i+1}+a_1+a_n-3n-1$$

(1) 最小值：

由 $a_i\geqslant 0$ 即证 $f\geqslant -3n-1$.

(2) 最大值：

由熟知的不等式（$\dfrac{1}{4}$ 引理，证明略）：

$$\begin{aligned}f=&\sum_{i=1}^{n-1}a_ia_{i+1}+a_n\cdot 1+1\cdot a_1-3n-1\\ \leqslant&\frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i+1\right)^2-3n-1=n^2-2n-\frac{3}{4}\end{aligned}$$

原题：

(1) 已知 $a_i \geq 0, i=1,2,3$，求证:

$$a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1 \leq \frac{1}{3}(a_1+a_2+a_3)^2.$$

(2) 已知 $n \geq 2, n \in \mathbb{N}_+$，且 $\sum_{i=1}^{n} a_i = 2n, a_i \geq 0$, $i=1$, 2, $\cdots$, n. 求

$$\sum_{i=1}^{n-1}(a_i-1)(a_{i+1}-1)$$

的最小值和最大值.