一道 2023 年北大强基离散最值问题的解答

2023-06-29　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_1bec04f81a6d9509

正整数 $x_1, x_2, \cdots, x_9$ 满足：

- $x_1 < x_2 < \cdots < x_9$；
- $x_1 + x_2 + \cdots + x_9 = 220$.
  当 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$ 取得最大值时，求 $x_9 - x_1$ 的最大值.

这是一道陈题，但原题只需求 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5$ 的最大值，而本题还需进一步考虑取等条件.

我们先求最大值.

若 $x_5 \leq 24$，则 $x_4 \leq 23$，$x_3 \leq 22$，$x_2 \leq 21$，$x_1 \leq 20$，于是

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 110.$$

若 $x_5 \geq 25$，则 $x_6 \geq 26$，$x_7 \geq 27$，$x_8 \geq 28$，$x_9 \geq 29$，于是 $x_6 + x_7 + x_8 + x_9 \geq 110$，即

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 110.$$

综上，有 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 110$.

下面考虑取等条件.

从上面的证明过程可以看出，等号成立时 $x_5 = 24$ 或 $x_5 = 25$.

$x_5 = 24$ 时，$x_1 = 20$，$x_2 = 21$，$x_3 = 22$，$x_4 = 23$. 于是

$$\begin{aligned} 110 =& x_6 + x_7 + x_8 + x_9 \\ \geq& 25 + 26 + 27 + x_9 \end{aligned}$$

即 $x_9 \leq 32$，因此 $x_9 - x_1 \leq 12$.

$x_5 = 25$ 时，$x_6 = 26$，$x_7 = 27$，$x_8 = 28$，$x_9 = 29$. 于是

$$\begin{aligned} 110 =& x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \\ \leq& x_1 + 22 + 23 + 24 + 25 \end{aligned}$$

即 $x_1 \geq 16$，因此 $x_9 - x_1 \leq 13$.

综上，当 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$ 取得最大值时，$x_9 - x_1$ 的最大值为为 13，此时 $x_1, x_2, \cdots, x_9$ 的取值依次为

$$16, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29$$