借一道简单的原创不等式，纪念今年的生日

2026-10-13　原文链接

0.1　题目

设 a_i, b_i（$i = 1, 2, \ldots, 1013$）为任意非负实数，下标模 1013 理解. 求最大的实数 C，使得不等式

$$\prod_{i=1}^{1013}(a_i a_{i+1} + b_i b_{i+1}) + C\prod_{i=1}^{1013}|a_i b_{i+1} - b_i a_{i+1}| \le \prod_{i=1}^{1013}(a_i^2 + b_i^2)$$

恒成立。

0.2　答案

最大的实数为

$$\boxed{C_{\max} = 2}.$$

0.3　构造

对 $1 \le j \le 506$，令

$$(a_{2j-1}, b_{2j-1}) = (1, 0), (a_{2j}, b_{2j}) = (0, 1)$$

并令

$$(a_{1013}, b_{1013}) = (1, 1).$$

也就是说，前 1012 对在 $(1, 0)$ 与 $(0, 1)$ 之间交替，最后一对取 $(1, 1)$.

将这组取值代入原不等式，容易得到

$$C \le 2.$$

0.4　证明

若某一对 $(a_i, b_i) = (0, 0)$，则原式中的三个乘积均为零，不等式成立.

以下设每一对都不为 $(0, 0)$. 由于 $a_i, b_i \ge 0$，可设

$$(a_i, b_i) = r_i(\cos\theta_i, \sin\theta_i)$$

其中 $r_i > 0, 0 \le \theta_i \le \dfrac{\pi}{2}$. 记

$$x_i = |\theta_{i+1} - \theta_i|, 0 \le x_i \le \frac{\pi}{2}.$$

于是

$$a_i a_{i+1} + b_i b_{i+1} = r_i r_{i+1} \cos x_i,$$

以及

$$|a_i b_{i+1} - b_i a_{i+1}| = r_i r_{i+1} \sin x_i.$$

由循环关系，

$$\prod_{i=1}^{1013} r_i r_{i+1} = \prod_{i=1}^{1013} r_i^2.$$

约去正的公共因子 $\prod_{i=1}^{1013} r_i^2$，只需证明

$$\prod_{i=1}^{1013} \cos x_i + 2 \prod_{i=1}^{1013} \sin x_i \le 1. \tag{1}$$

若某个 $x_i = 0$，则正弦乘积为零，而余弦乘积不超过 1，式 (1) 成立，下设所有 $x_i > 0$.

由 1013 为奇数，熟知存在 $1 \le k \le 1013$，使得

$$\theta_k \le \theta_{k+1} \le \theta_{k+2} \text{或} \theta_k \ge \theta_{k+1} \ge \theta_{k+2}.$$

“

否则，$(\theta_k - \theta_{k+1})(\theta_{k+1} - \theta_{k+2}) < 0$ 恒成立，对 $1 \le k \le 1013$ 求积即得矛盾.

从而

$$x_k + x_{k+1} = |\theta_{k+2} - \theta_k| \le \frac{\pi}{2}.$$

因此

$$2 \sin x_k \sin x_{k+1} \le 1 - \cos(x_k + x_{k+1}) \le 1. \tag{2}$$

将上述两个相邻下标删去，记剩余下标组成的集合为 I，则 $|I| = 1011$. 令

$$A = \prod_{i \in I} \cos x_i, B = \prod_{i \in I} \sin x_i.$$

由各因子均在 $[0,1]$ 内，以及式 (2)，得到

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{1013}\cos x_i+2\prod_{i=1}^{1013}\sin x_i &= A\cos x_k\cos x_{k+1}+2B\sin x_k\sin x_{k+1}\\ &\le A+B.\end{aligned}$$

由于 I 中至少还有两个下标，任取不同的 $p,q\in I$。其余因子均不超过 1，故

$$A\le\cos x_p\cos x_q, B\le\sin x_p\sin x_q.$$

$$\begin{aligned}A+B &\le \cos x_p\cos x_q+\sin x_p\sin x_q\\ &= \cos(x_p-x_q)\\ &\le 1.\end{aligned}$$

证毕.