数学竞赛每日一练第 15 期解答

2021-06-19 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_1db1af0b6f2dd561

p 是一个素数，证明：不定方程

$$x^p + y^p = (3p)^p$$

没有 $xy \neq 0$ 的整数解.

解答（PDF 中已展开）

证明 $p = 2$ 时，由枚举法知结论显然成立.

p 为奇素数时，由费马小定理知

$$0 \equiv (3p)^p = x^p + y^p \equiv x + y (\mathrm{mod}\ p)$$

而 $x, y < 3p$，故 $x + y = p$，$2p$，$3p$，$4p$ 或 $5p$，由奇偶性可排除 $2p$，$4p$，又注意到

$$(3p)^p = x^p + y^p < (x + y)^p$$

故必有 $x + y = 5p$.

且由 $x, y < 3p$ 可知 $2p < x, y < 3p$. 设 $x = 2p + k$，则

$$\begin{aligned} & x^p + y^p \\ =& (2p + k)^p + (2p + (p - k)^p \\ =& Cp^3 + 2p^2k^{p-1} + k^p + 2p^2(p - k)^{p-1} + p^2k^{p-1} - k^p \\ =& Cp^3 + 3p^2k^{p-1} + 2p^2(p - k)^{p-1} \end{aligned}$$

其中 $C \in \mathbb{Z}$. 注意到 $p^3 \mid (3p)^p = x^p + y^p$，故

$$p \mid 3k^{p-1} + 2(p - k)^{p-1}$$

由费马小定理知 $5 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$，即 $p = 5$.

最后只需证明不定方程 $x^5 + y^5 = 15^5$ 没有正整数解.（由费马大定理显然……）

注意到一个整数的 5 次方模 11 的余数为 ± 1 或 0（为 0 当且仅当这个数是 11 的倍数），故 x，y 中必有一个数为 11，不妨设 $x = 11$，由 $x + y = 5p = 25$ 知，$y = 14$，而易知 $11^5 + 14^5 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3)$，矛盾. 综上所述，原方程无正整数解.