2023 年高联苏州市选拔赛试题（附最新版预赛试题合辑）

2023-05-31　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_1dd39ca26d6e1343

本文为图片版：正文为 3 张图片，图片中的文字无法被站内检索或读屏朗读。点击图片可放大查看，或前往公众号原文阅读。

12　2023 年江苏省苏州市预赛

一、填空题（本题共 10 小题，满分 70 分，每小题 7 分.）

1. 钝角三角形的三边长分别为 $m, m+1, m+2$，则实数 m 的取值范围是 _____.

2. 已知直线 $l_1: y=x$，$l_2: y=2x$，则与 l_1, l_2 所成角相等的直线 l 的斜率为 _____.

3. 已知 $x \in \mathbb{R}$，则 $\dfrac{4\sin x\cos x+3}{\cos^2 x}$ 的最小值为 _____.

4. 已知 $(x+3)(x-1)^4 = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5$，则 $a_3+a_4+a_5=$ _____.

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+1}-3a_n+2a_{n-1}=1$ $(n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*)$，则 $\{a_n\}$ 的通项公式为 _____.

6. 已知椭圆 $C_1: \dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，椭圆 $C_2: (x-2)^2+4y^2=1$，C_1, C_2 的公切线与 x 轴交于点 A，则点 A 的坐标为 _____.

7. 在面积为 2 的矩形 $ABCD$ 中，点 E 为 AD 边的中点，将 $\triangle ABE$ 和 $\triangle DEC$ 分别沿 BE, CE 翻折，使得 A, D 重合于点 P，则三棱锥 $P-EBC$ 体积的最大值为 _____.

8. 方程 $5z^4+10z^3+10z^2+5z+1=0$ 有四个复数根，其中模长最大的复数根的实部为 _____.

9. 已知某公交始发站有 A、B、C 三种班次的车在上午六点同时发车，且发车的时间间隔依次为 10 分钟，12 分钟，15 分钟．若小明在上午八点到十二点之间某一时刻到达始发站乘坐这三种班车之一，则平均等车的时间为 _____ 分钟.

10. 集合 $A=\{1, 2, \cdots, 10\}$ 的非空子集中，元素和是 10 的倍数的子集称为好子集．则 A 的好子集共有 _____ 个.

二、解答题（本大题共 4 小题，每小题 20 分，共 80 分）

11. 已知正数数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 满足：$a_1=1, b_1=2, a_{n+1}=a_n+\dfrac{b_n}{a_n}, b_{n+1}=b_n+\dfrac{a_n}{b_n}$．求证：

(1) $50 < b_{50} < a_{50} < 51$;

(2) $a_{50}-b_{50} < \dfrac{1}{2450}$.

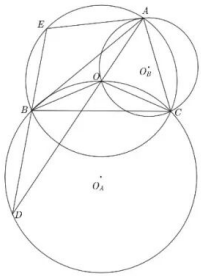
25

12. 已知椭圆 $E:\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$，$A(0,2)$，$P(-3,2)$，过点 P 的直线 l 与椭圆 E 交于不同的两点 B,C，直线 AB,AC 分别与 x 轴交于点 M,N.

(1) 若 $|MN|=6$，求直线 l 的方程；

(2) 求 $\triangle PMN$ 外心的轨迹方程.

13. 如图，$\triangle ABC$ 的外接圆为圆 O，$\triangle OBC,\triangle OAC$ 的外接圆分别为圆 O_A 和圆 O_B，AO 的延长线与圆 O_A 交于点 D，DB 的延长线与圆 O 交于点 E. 求证：EA 为圆 O_B 的切线.



14. 下图为一个开关阵列，每个开关只有“开”和“关”两种状态，一开始所有开关均关闭. 按其中一个开关 1 次，将导致自身和所有相邻的开关改变状态. 例如，按 $(2,2)$ 将导致 $(1,2),(2,1),(2,2),(2,3),(3,2)$ 改变状态. 如果要求每个开关至多按一次，按开关的总次数最少一次.

$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$
$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$	$(2,4)$
$(3,1)$	$(3,2)$	$(3,3)$	$(3,4)$
$(4,1)$	$(4,2)$	$(4,3)$	$(4,4)$

(1) 末状态恰好是 $(2,1),(3,2),(4,3),(1,2),(2,3),(3,4)$ 这 6 处开关打开，问：至少需要按多少次？请给出证明；

(2) 若要求所有开关均关闭，至少需要按多少次？请直接写出结果和一个方案.

26

已加入 2023 预赛合辑，并修改了四川预赛第 5 题的输入错误。

