加拿大 CRUX 杂志问题 4801-4810

2023-02-08 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_1f72484ef17829ad

4801.

求所有函数 $f\colon (0,\infty)\to\mathbb{R}$，使得对任意 $x,y>0$，都有

$$f\left(x+\frac{1}{y}\right)=yf(xy+y).$$

4802.

假设一个班级有 $2n$ 个学生，每个人开始时都有一定数量的糖果，且糖果的总数量是 n 的倍数. 在每一天，老师选择 n 个学生，给他们每个人发放 $c\in\mathbb{N}$ 个糖果. 求所需的最少天数，使得无论开始时如何分配糖果，老师总能让所有学生的糖果糖果数量变成一样. (注：c 可能每天都在变化)

4803.

求所有非负整数 a，b，c 和素数 p，q，使得

$$p^{2a}+q^{2b}=(2c+1)^2.$$

4804.

设锐角 $\triangle ABC$ 的内心为 I，外心为 O. 边 BC 上一点 D，满足 $AI\perp ID$. 设点 N 为劣弧 BC 的中点，DA、DN 和 $\triangle ABC$ 的外接圆分别再次交于点 E、F. 设 EF 和 AI 交于点 G. 求证：$OI\perp DG$.

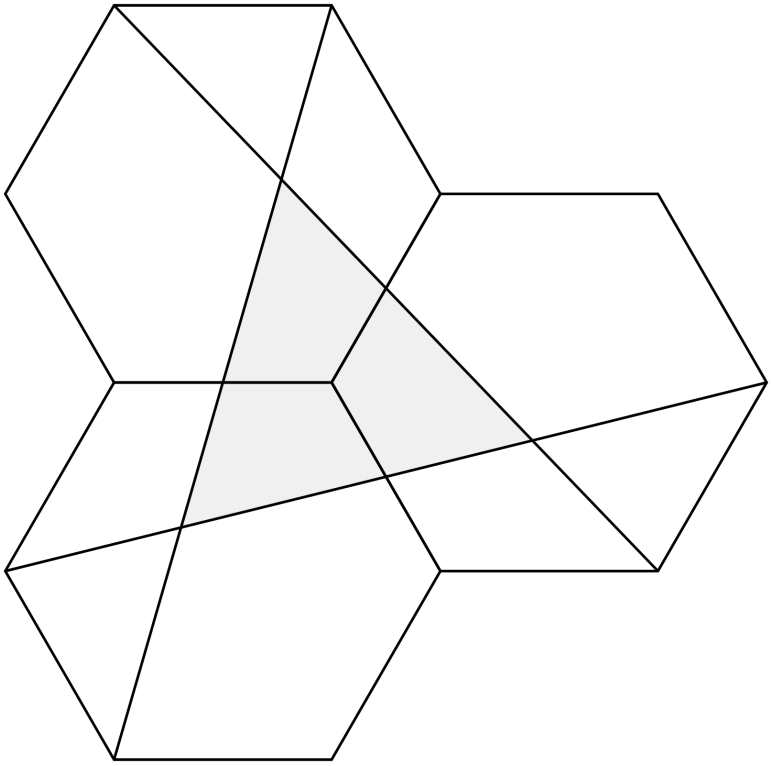
4805.

正实数 a，b，c 满足 $ab+bc+ca=4abc$. 求证：

$$\frac{1}{\sqrt[a]{a}}+\frac{1}{\sqrt[b]{b}}+\frac{1}{\sqrt[c]{c}}\geq 4\sqrt[3]{\frac{4}{3}}.$$

4806.

如下图所示，有三个全等的、不重叠的正六边形，这三个正六边形有一个公共顶点. 如图所示连接顶点，这些线段围成一个阴影三角形. 如果每个正六边形的边长为 1，求阴影三角形的面积.



4807.

$\triangle ABC$ 内接于圆 O. 点 M、N、P 分别为边 BC、CA、AB 的中点. 射线 PO 和圆 (ABM) 交于点 E; 射线 NO 和圆 (ACM) 交于点 F. 设 AE 和 AF 分别和圆 (MEF) 再次交于点 G 和 H. 求证: GH、EF、BC 三线共点.

4808.

求所有正整数 x, y, z, 满足 $(x,y,z)=1$, 且对 $k\in\{2,4,6\}$, 都有 $x+y+z\mid x^k+y^k+z^k$.

4809.

设 a, $b>0$, 求极限:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\left(\int_0^1\frac{x^k}{ax+b}dx\right)^{-1}\left(\int_0^1\frac{x^k}{bx+a}dx\right)^{-1}.$$

4810.

对 $n>1$, 设 a_1, a_2, $\cdots$, a_n 为正实数, 且满足 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=1$. 设 $S=a_1+a_2+\cdots+a_n$, 求证:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1-a_i^2}{(S-a_i)^2} \geq \frac{n\sqrt{n}}{(n-1)^2}.$$