# 2022 年中国台湾 IMOC——数论、组合组

2022-09-08　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_1ffbca3f28c125ac

每年，我国台湾的前 IMO 参赛者组成的小团体都会举办一个夏令营，讲解知识和技巧，还有 8 次模拟考试. 从 2017 年开始，他们取消了模拟考试，用若干练习题来取代. 下面就是 2022 年中国夏令营的 IMOC 练习题.

## 数论组

1. 求所有正整数 $n$，使得对任意 $i=1,2,\cdots,n$，$\dfrac{n!}{i!(n-i+1)!}$ 均为整数.

2. 对正整数 $n$，定义 $f(n)$ 为满足如下要求的最小正整数 $x$：存在正整数 $k$ 和 $k$ 个不同的正整数 $n=a_0<a_1<a_2<\cdots<a_{k-1}=x$，使得 $a_0a_1\cdots a_{k-1}$ 为完全平方数. 求正实数 $c$ 的最小值，使得存在正整数 $N$，对任意 $n>N$，都有 $f(n)\le cn$.

3. 求所有正整数 $n$，满足 $2n+3\mid n!-1$.

4. 求所有正整数对 $(m,n)$，使得 $mn(m^2+6mn+n^2)$ 为完全平方数.

5. 求不定方程

$$p^p+(p+1)^p+\cdots(p+r)^p=(p+r+1)^p$$

   的所有解 $(p,r)$，其中 $p$ 为素数，$r$ 为正整数.

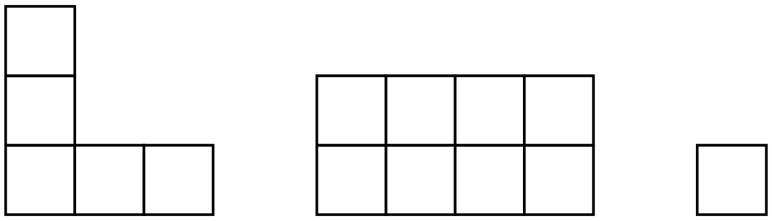
6. 求所有整系数多项式 $P(x)$，使得对任意正整数 $x$，有 $\tau(P(x))\ge\tau(x)$. 其中 $\tau(n)$ 为 $n$ 的正约数个数，定义 $\tau(0)=\infty$.
   注：本题可以使用如下结论：对任意 $\varepsilon\ge0$，存在整数 $C_\varepsilon$，使得对任意正整数 $n$，从小到大的第 $n$ 个素数不超过 $C_\varepsilon n^{1+\varepsilon}$.

## 组合组

1. 给定正整数 $k$，一只鸽子和一只海鸥在 $n\times n$ 的网格中玩游戏. 从鸽子开始，双方轮流行动. 鸽子选择其中 $m$ 个格子，并在它选择的每个格子中下一个蛋. 海鸥选择一个 $k\times k$ 的网格，吃掉里面的所有蛋. 如果在某一时刻，$n\times n$ 网格中的每一个格子内都有一个蛋，那么鸽子获胜；否则海鸥获胜. 对任意 $n\ge k$，求出所有的 $m$，使得鸽子能够获胜.

2. 桌子上有 2022 块石头. 游戏开始时，老师选择一个正整数 $m$，并让 A 和 B 进行游戏. 从 A 开始，A 能在他的回合内移走至多 $m$ 块石头. 两人轮流移走石头，每一回合能移走的石头数目至少为 1，且不超过对方上一回合移走石头数目的 2 倍. 无法移走石头者失败. 求最小的正整数 $m$，使得 $A$ 有必胜策略.

3. 用如下三种形状的木板覆盖一个 $101 \times 101$ 的正方形木板，没有缝隙和重叠．至少需要多少块 $1 \times 1$ 的木板?



4. 给定正整数 $N$．考虑 $1$，$2$，$\cdots$，$N$ 的一个排列 $p_1$，$p_2$，$\cdots$，$p_N$．对该排列的一段 $p_l$，$p_{l+1}$，$\cdots$，$p_r$，称它为“极端的”，若 $p_l$ 和 $p_r$ 分别为这一段的最大值和最小值．称排列 $p_1$，$p_2$，$\cdots$，$p_N$ 为“超级平衡的”，若其不存在长度不少于 3 的“极端的”段．例如：$1$，$4$，$2$，$3$ 是“超级平衡的”，但 $3$，$1$，$2$，$4$ 不是．回答以下问题：
   (1) 有多少个“超级平衡的”排列?
   (2) 对任意正整数 $M \leq N$，有多少个满足 $p_1 = M$ 的“超级平衡的”排列?

5. 称一个每项均为 $0$，$1$，$2$ 之一的数列为“三元数列”．对三元数列 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，定义其“差数列”为

$$(|x_1 - x_2|, |x_2 - x_3|, \cdots, |x_{n-1} - x_n|)$$

   每次求差数列会使得数列长度减少 $1$，在求 $n-1$ 次差数列后，数列中将只剩下一项，定义其为原数列的特征值.
   有多少个长度为 2023 的三元数列，其特征值为 0?

6. 给定整数 $k \geq 4$．Sunny 和 Ming 进行一个字符串游戏．字符串是一个数列，其每项均为 1 到 $k$ 之间的整数（包括 1 和 $k$）．起初，Sunny 选择两个正整数 $N$，$L \geq 2$，并写下 $N$ 个字符串，每个字符串长度均为 $L$．然后 Ming 标记至多 $\dfrac{N}{2}$ 个字符串．然后 Sunny 选择一个未被标记的字符串 $s$，并求出最大整数 $n$，使得存在另一个字符串满足它的前 $n$ 个字符和 $s$ 的前 $n$ 个字符相同．接着 Sunny 移除那些前 $n$ 个字符和 $s$ 的前 $n$ 个字符不同的字符串，只留下前 $n$ 个字符和 $s$ 的前 $n$ 个字符相同的字符串．最后，Ming 选择 1 到 $k$ 之间（包括 1 和 $k$）的一个整数 $d$，移除第 $n+1$ 个字符为 $d$ 的所有字符串．Sunny 的得分为剩余字符串的个数．求 Sunny 可以保证得到的最高分.