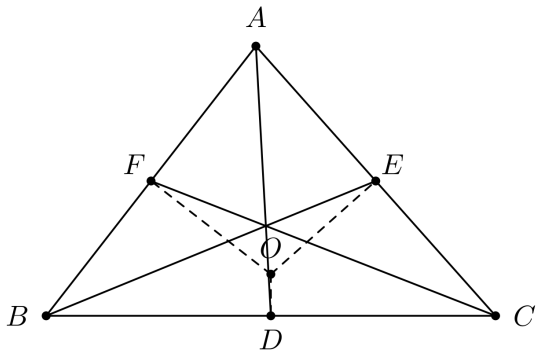
卡诺定理的两个证明

2021-07-10 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_204f1de639c56346

这是今天在上课时讲的一道例题.

> **卡诺定理**三角形外心到三边的有向距 (外心在边的形内一侧的距离为正，形外为负) 之和等于其外接圆与内切圆半径之和.



设三角形为 $\triangle ABC$，外心为 O，O 在 BC，CA，AB 上的射影分别为 D，E，F，$OD=d_1$，$OE=d_2$，$OF=d_3$. $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R，内切圆半径为 r，面积为 S.

分析题中没有出现内心，所以考虑将内切圆半径用三角形的边或角表示出来. 外心 O 到三边的距离可以有如下两种处理方式:

1. 计算面积，即有等式
$$OD\cdot BC+OE\cdot CA+OF\cdot AB=2S$$
2. 用三角函数表示，即
$$OD=R\cos\angle COD=\cos A$$

由此有了以下两种方法:

方法一只考虑 O 在 $\triangle ABC$ 内部的情形，其余情形类似可得.

注意到

$$ad_1+bd_2+cd_3=2S=(a+b+c)r$$

要产生 $R+r$，我们在两边同时加上 $(a+b+c)R$，于是有

$$ad_1+bd_2+cd_3+(a+b+c)R=(a+b+c)(R+r)$$

要想证明 $d_1+d_2+d_3=R+r$，只需证

$$(a+b+c)(d_1+d_2+d_3)=(a+b+c)(R+r)$$

即证

$$(a+b+c)(d_1+d_2+d_3)=ad_1+bd_2+cd_3+(a+b+c)R$$

也即

$$(b+c)d_1+(c+a)d_2+(a+b)d_3=(a+b+c)R$$

注意到等式左右两边的项数之比为 $2:1$，再结合题目中的垂直条件，联想到四点共圆和托勒密定理.

由 O、E、F、A 四点共圆知：

$$OE\cdot AF+OF\cdot AE=EF\cdot OA$$

且 $OE=d_2$，$AF=\dfrac{1}{2}c$，$OF=d_3$，$AE=\dfrac{1}{2}b$，$EF=\dfrac{1}{2}a$，$OA=R$. 于是上式可写为

$$cd_2+bd_3=aR$$

同理有

$$ad_3+cd_1=bR$$

$$bd_1+ad_2=cR$$

三式相加即证.

评注以上还原了上课时的分析过程，整体十分自然. 读者可以自行尝试点 O 在三角形外部的情形.

方法二事实上，我们有计算外心 O 到 $\triangle ABC$ 三边有向距的公式：

$$d_1 = R\cos A, d_2 = R\cos B, d_3 = R\cos C$$

值得一提的是，当 A 为钝角时，$\cos A < 0$，此时 d_1 为负，恰好符合有向距的要求.

又有

$$r = \frac{2S}{a+b+c} = \frac{4R^2 \sin A \sin B \sin C}{2R(\sin A + \sin B + \sin C)}$$

于是

$$\begin{aligned} & d_1 + d_2 + d_3 = R + r \\ \iff & R\cos A + R\cos B + R\cos C = R + \frac{2R\sin A \sin B \sin C}{\sin A + \sin B + \sin C} \\ \iff & \cos A + \cos B + \cos C - 1 = \frac{2\sin A \sin B \sin C}{\sin A + \sin B + \sin C} \end{aligned}$$

这由三角形中常见的两个三角恒等式即可证明:

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

评注使用三角法可以避免对 O 位置的讨论.