2025 年波兰数学奥林匹克（第一轮）

2025-01-01　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_2095b4abd7a3e196

本文为图片版：正文为 3 张图片，图片中的文字无法被站内检索或读屏朗读。点击图片可放大查看，或前往公众号原文阅读。

2025 年波兰数学奥林匹克（第一轮）

程国根　译

1. 设 $f(x)=ax^2+bx+c$ 是一个二次函数，其图像与 x 轴无交点．求证：$a(2a+3b+6c)>0$．

2. 设矩形 $ABCD$ 内接于圆心为 O 的圆 ω．直线 l 过点 O，交直线 BC 于点 E，交直线 AD 于点 F，交圆 ω 于点 K 和 L，且点 K,E,F,L 在直线 l 上顺次排列．ω 在点 K 和 L 处的切线分别与 CD 相交于 M 和 N．求证：E,F,M,N 四点共圆．

3. 设 n 是 2024 个不同质数的乘积．求满足 $n+\gcd(n,k)=k$ 的正整数 k 的个数．

4. 求所有满足条件的正整数 $n\geq 2$：存在正整数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，使得集合 $\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 和 $\{a_1+a_2,a_2+a_3,\cdots,a_n+a_1\}$ 都包含 n 个连续整数．

5. 给定正整数 a,b,n，其中 a 和 n 是偶数，b 是奇数，且 $ab(a+b)^{n-1}$ 能被 a^n+b^n 整除．求证：存在一个质数 p，使得 p^{n+1} 整除 a^n+b^n．

1

6. 给定正整数 k,n 以及集合 $\{1,2,\cdots,2n\}$ 的子集 $A_1,A_2,\cdots,A_k$. 称一对数 x,y 是"好的", 如果 $x<y$, $x,y\in\{1,2,\cdots,2n\}$, 并且存在唯一的指标 $i\in\{1,2,\cdots,2n\}$, 使得 x,y 中恰好有一个属于 A_i. 求证:"好的"数对最多有 n^2 个.

7. 半径相等的圆 o_1 和 o_2 相交于点 A,B. 点 C,D,E,F 依次在一条直线上, 其中 C,E 在 o_1 上, D,F 在 o_2 上. CD 和 EF 的垂直平分线分别与 AB 相交于 X,Y. 求证: $AX=BY$.

8. 实数 a,b,c,x,y,z 满足:

$$\begin{cases} a^2+2bc=x^2+2yz \\ b^2+2ca=y^2+2zx \\ c^2+2ab=z^2+2xy \end{cases}$$

求证: $a^2+b^2+c^2=x^2+y^2+z^2$.

9. 给定正整数 m,n, 满足 $\sqrt{2}<\dfrac{m}{n}<\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}$, 且 m 为偶数. 求证: 存在正整数 $k<m$ 和 $l<n$, 使得

$$\left|\frac{k}{l}-\sqrt{2}\right|<\frac{m}{n}-\sqrt{2}.$$

2

10. 在锐角 $\triangle ABC$ 中，$AB < AC$，设 Ω 为 $\triangle ABC$ 的外接圆．点 M 和 N 分别是 Ω 上优弧 BC 和劣弧 BC 的中点．点 $X \neq M$ 和 $Y \neq N$ 在直线 AM 上，且满足 $BX = BM = CM = CY$．点 E 在直线 AC 上，且满足 $BE \perp AC$．求证：$\angle FNX = \angle YNE$．

11. 给定正整数 l 和正实数 $a_1, a_2, \cdots, a_l$．对于任意 $n \in \mathbb{Z}_+$，定义

$$c_n = \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_l=n} \frac{(2n)!}{(2k_1)!(2k_2)!\cdots(2k_l)!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \cdots a_l^{k_l}.$$

求证：对于任意 $n \in \mathbb{Z}_+$，都有 $\sqrt[n]{c_n} \leq \sqrt[n+1]{c_{n+1}}$．

12. 称自然数集的一个子集 A 是“酷的”，如果存在一个整数 k，使得对于每个整数 $n \geq k$，都存在唯一的一对 A 中的整数 $a > b$，满足 $n = a + b$．判断是否存在一个“酷的”集合．

3