2023 年瑞士 IMO 国家队选拔考试

2023-10-08 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_2127269976571a92

2023 年瑞士 IMO 国家队选拔考试

程国根译

第一天

1. 2022 年 IMO 预选题 C1

2. 设 S 是一个由正整数组成的非空集合，满足条件：若 n 在 S 中，则 2^n+1 的所有正约数也在 S 中．求证：S 中存在一个形如 $(p_1p_2\cdots p_{2023})^{2023}$ 的数，其中 $p_1,p_2,\cdots,p_{2023}$ 为互不相同的素数，且均大于 2023．

3. 2022 年 IMO 预选题 G5

1

2023 年瑞士 IMO 国家队选拔考试

程国根译

第二天

4. 设 $\triangle ABC$ 和 $\triangle AMN$ 顺相似，且不互相重叠，满足 $AB = AC$，$AM = AN$．设点 O 为 $\triangle MAB$ 的外心．求证：O, C, N, A 四点共圆当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形．

5. 东京地铁系统是世界上最高效的地铁系统之一。已知存在正奇数 k，使得每条地铁线恰经过 k 个车站，每个车站也恰被 k 条地铁线经过。人们只需搭乘一条地铁线，就可以从任意车站到任意的另一个车站，但这种连接方案是唯一的。此外，任意两条地铁线都恰经过同一个地铁站。
David 正在为 IMO 参赛队伍策划一次远足，他想参观一个由 k 个车站组成的集合 S．David 发现 S 中没有三个车站位于同一条地铁线上。证明：存在一个不在 S 中的车站，它通过不同的地铁线与 S 中的每个车站相连。

6. 2022 年 IMO 预选题 A5

2023 年瑞士 IMO 国家队选拔考试

程国根译

第三天

7. 求所有首一实系数多项式 $P(x)=x^{2023}+a_{2022}x^{2022}+\cdots+a_1x+a_0$，满足 $a_{2022}=0$，$P(1)=1$，且 P 的所有根均为小于 1 的实数.

8. 2022 年 IMO 预选题 G4

9. 图 G 的每个顶点处均写有一个整数，已知任意两个整数在 G 中均由有限条边相连接. 对整数 x 和 y，定义 $d(x,y)$ 为连接 x 和 y 所需边数的最小值. 已知对任意整数 x,y，都有 $d(x,y)\mid x-y$. 设 $S(G)=\{d(x,y)\mid x,y\in\mathbb{Z}\}$，求集合 $S(G)$ 的所有可能情况.

第四天

10. 2022 年 IMO 预选题 N3

11. 2022 年 IMO 预选题 A6

12. 2022 年 IMO 预选题 C5

2023 年瑞士 IMO 国家队选拔考试

程国根译

第一天

1. **2022 年 IMO 预选题 C1**

2. 设 S是一个由正整数组成的非空集合，满足条件：若 n在 S中，则 $2^{n}+1$的所有正约数也在 S中. 求证：S中存在一个形如 $(p_{1}p_{2}\cdots p_{2023})^{2023}$的数，其中 $p_{1},p_{2},\cdots,p_{2023}$为互不相同的素数，且均大于 2023.

3. **2022 年 IMO 预选题 G5**

2023 年瑞士 IMO 国家队选拔考试

程国根译

第二天

4. 设 $\triangle ABC$和 $\triangle AMN$顺相似，且不互相重叠，满足 $AB=AC$，$AM=AN$．设点 O为 $\triangle MAB$的外心．求证：O,C,N,A四点共圆当且仅当 $\triangle ABC$为正三角形.

5. 东京地铁系统是世界上最高效的地铁系统之一。已知存在正奇数 k，使得每条地铁线恰经过k个车站，每个车站也恰被 k条地铁线经过。人们只需搭乘一条地铁线，就可以从任意车站到任意的另一个车站，但这种连接方案是唯一的。此外，任意两条地铁线都恰经过同一个地铁站。David 正在为 IMO 参赛队伍策划一次远足，他想参观一个由 k个车站组成的集合 S．David 发现 S中没有三个车站位于同一条地铁线上。证明：存在一个不在 S中的车站，它通过不同的地铁线与 S中的每个车站相连。

6. **2022 年 IMO 预选题 A5**

2023 年瑞士 IMO 国家队选拔考试

程国根译

第三天

7. 求所有首一实系数多项式 $P(x)=x^{2023}+a_{2022}x^{2022}+\dots+a_1x+a_0$，满足 $a_{2022}=0$，$P(1)=1$，且 P的所有根均为小于 1的实数.

8. **2022 年 IMO 预选题 G4**

9. 图 G的每个顶点处均写有一个整数，已知任意两个整数在 G中均由有限条边相连接．对整数 x和 y，定义 $d(x,y)$为连接 x和 y所需边数的最小值．已知对任意整数 x,y，都有 $d(x,y)\mid x-y$．设 $S(G)=\{d(x,y)\mid x,y\in\mathbb{Z}\}$，求集合 $S(G)$的所有可能情况.

第四天

10. **2022 年 IMO 预选题 N3**

11. **2022 年 IMO 预选题 A6**

12. **2022 年 IMO 预选题 C5**

解答（PDF 中已展开）

\section*{2023年瑞士IMO国家队选拔考试}\flushright 程国根译\section*{第一天}\ex \textbf{2022年IMO预选题C1}\ex
↪ 设S是一个由正整数组成的非空集合，满足条件：若n在S中，则$2^{n}+1$的所有正约数也在S中．求证：
↪ S中存在一个形如$(p_{1}p_{2}\cdots p_{2023})^{2023}$的数，其中$p_{1},p_{2},\cdots,p_{2023}$为互不相同的素数，
↪ 且均大于2023．\ex \textbf{2022年IMO预选题G5}\newpage\section*{2023年瑞士IMO国家队选拔考试}\flushright
↪ 程国根译\section*{第二天}\ex 设$\triangle ABC$和$\triangle AMN$顺相似，且不互相重叠，满足$AB=AC$，$AM=AN$.
↪ 设点O为$\triangle MAB$的外心．求证：O,C,N,A四点共圆当且仅当$\triangle ABC$为正三角形．\ex
↪ 东京地铁系统是世界上最高效的地铁系统之一。已知存在正奇数 k，使得每条地铁线恰经过k个车站，
↪ 每个车站也恰被k条地铁线经过。人们只需搭乘一条地铁线，就可以从任意车站到任意的另一个车站，
↪ 但这种连接方案是唯一的。此外，任意两条地铁线都恰经过同一个地铁站。\\David正在为IMO参赛队伍策划一次远足，
↪ 他想参观一个由k个车站组成的集合S．David发现S中没有三个车站位于同一条地铁线上。证明：
↪ 存在一个不在S中的车站，它通过不同的地铁线与S中的每个车站相连。\ex
↪ \textbf{2022年IMO预选题A5}\newpage\section*{2023年瑞士IMO国家队选拔考试}\flushright 程国根译\section*{第三天}\ex
↪ 求所有首一实系数多项式$P(x)=x^{2023}+a_{2022}x^{2022}+\dots+a_1x+a_0$，满足$a_{2022}=0$，$P(1)=1$，
↪ 且P的所有根均为小于1的实数．\ex \textbf{2022年IMO预选题G4}\ex 图G的每个顶点处均写有一个整数，
↪ 已知任意两个整数在G中均由有限条边相连接．对整数x和y，定义$d(x,y)$为连接x和y所需边数的最小值．
↪ 已知对任意整数x,y，都有$d(x,y)\mid x-y$．设$S(G)=\{d(x,y)\mid x,y\in\mathbb{Z}\}$，求集合$S(G)$的所有可能情况．
↪ \section*{第四天}\ex \textbf{2022年IMO预选题N3}\ex \textbf{2022年IMO预选题A6}\ex \textbf{2022年IMO预选题C5}