数学竞赛每日一练第 16 期解答

2021-06-20 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_21c1e2b5b4ac2e33

a，b，c 为满足 $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}=\dfrac{27}{4}$ 的正实数. 求证:

$$\frac{a^3+b^2}{a^2+b^2}+\frac{b^3+c^2}{b^2+c^2}+\frac{c^3+a^2}{c^2+a^2}\geq\frac{5}{2}.$$

解答（PDF 中已展开）

证明由均值不等式，$x>0$ 时，

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3+x^3+x^3\geq 2x^2$$

即 $x^3\geq x^2-\dfrac{4}{27}$. 因此

$$\begin{aligned}
&\frac{a^3+b^2}{a^2+b^2}+\frac{b^3+c^2}{b^2+c^2}+\frac{c^3+a^2}{c^2+a^2}\\
\geq&\frac{a^2+b^2-\dfrac{4}{27}}{a^2+b^2}+\frac{b^2+c^2-\dfrac{4}{27}}{b^2+c^2}\frac{c^2+a^2-\dfrac{4}{27}}{c^2+a^2}\\
=&3-\frac{4}{27}\left(\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{c^2+a^2}\right)\\
\geq&3-\frac{1}{27}\left(\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)+\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)+\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\right)\right)\\
=&3-\frac{2}{27}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\\
=&\frac{5}{2}
\end{aligned}$$