深圳中学填空压轴的三角不等式，计算量并不大

2026-05-20　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_22ff696136478280

题目：在 $\triangle ABC$ 中，内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，若 $a^2+2b^2=4c^2$，则 $f=\dfrac{2}{\sin^2 A}+\dfrac{1}{\sin^2 B}$ 的最小值为 _____.

解答（PDF 中已展开）

答案： $\dfrac{18}{5}$

构造： $a:b:c=\sqrt{14}:\sqrt{11}:3$

证法一：

设 $\sin^2 A=4\sin^2 C\sin^2\theta$，$\sin^2 B=2\sin^2 C\cos^2\theta$，$\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. 则

$\cos C=\frac{\sin^2 A+\sin^2 B-\sin^2 C}{2\sin A\sin B}=\frac{3\sin^2 A+2\sin^2 B}{8\sin A\sin B}=\frac{2-\cos 2\theta}{2\sqrt{2}\sin 2\theta}$

即 $\sin^2 C=1-\dfrac{(2-\cos 2\theta)^2}{8\sin^2 2\theta}$. 于是

$f=\frac{2}{\sin^2 A}+\frac{1}{\sin^2 B}=\frac{1}{2\sin^2 C\sin^2\theta}+\frac{1}{2\sin^2 C\cos^2\theta}=\frac{2}{\sin^2 C\sin^2 2\theta}$

记 $t=\cos 2\theta\in(-1,1)$，则

$f=\frac{2}{\sin^2 C\sin^2 2\theta}=\frac{2}{\sin^2 2\theta-\frac{(2-\cos 2\theta)^2}{8}}=\frac{16}{-9t^2+4t+4}\geqslant\frac{16}{\frac{40}{9}}=\frac{18}{5}$

证法二：

不妨设 $c=2$，$A(-1,0)$，$B(1,0)$，$C(x,y)$，不妨设 $y>0$，则条件等价于

$(x-1)^2+y^2+2((x+1)^2+y^2)=16$

即 $3x^2+3y^2+2x=13$.

于是 $y^2=-\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\dfrac{40}{9}\leqslant\dfrac{40}{9}$

$$f=\frac{2}{\sin^2 A}+\frac{1}{\sin^2 B}=\frac{2}{\frac{y^2}{(x+1)^2+y^2}}+\frac{1}{\frac{y^2}{(x-1)^2+y^2}}=\frac{16}{y^2}\geq\frac{18}{5}$$