一道复数题的线代背景

2022-10-08　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_24eb45db9b9c95d4

假设 a，b，c，$d\in\mathbb{C}$，且 $|a|^2+|b|^2=|c|^2+|d|^2=1$，$a\bar{c}+b\bar{d}=0$. 求证：$a\bar{b}+c\bar{d}=0$.

证明：

记

$$X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

. 由于

$$\begin{aligned} XX^H &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a\bar{a}+b\bar{b} & a\bar{c}+b\bar{d} \\ c\bar{a}+d\bar{b} & c\bar{c}+d\bar{d} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} |a|^2+|b|^2 & a\bar{c}+b\bar{d} \\ \overline{a\bar{c}+b\bar{d}} & |c|^2+|d|^2 \end{pmatrix} \\ &= I_2 \end{aligned}$$

于是 X 为酉矩阵. 因此

$$I_2=X^HX=\begin{pmatrix} |a|^2+|b|^2 & \overline{a\bar{b}+c\bar{d}} \\ a\bar{b}+c\bar{d} & |c|^2+|d|^2 \end{pmatrix}$$

即 $a\bar{b}+c\bar{d}=0$，证毕.