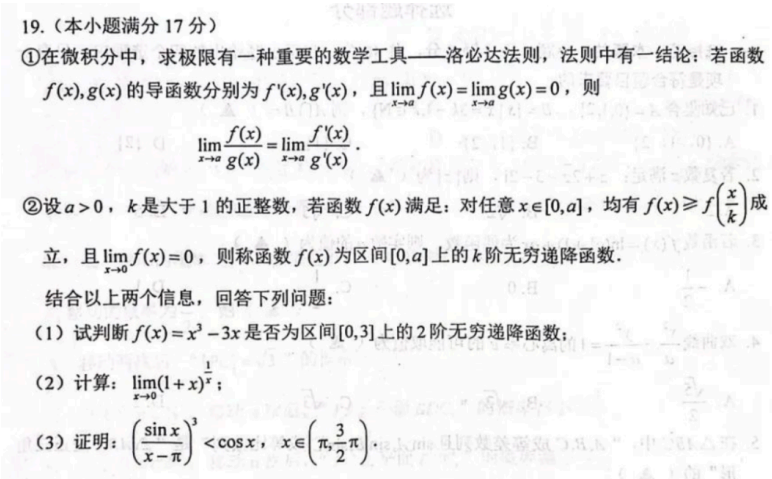
既然命题人都出洛必达法则了，那我用积分不等式来做也不过分吧

2024-03-22　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_258b5eb69e8bcf1f

这是前两天的金丽衢十二校二模试卷的最后一题：



19.（本小题满分 17 分）

①在微积分中，求极限有一种重要的数学工具——洛必达法则，法则中有一结论：若函数 $f(x),g(x)$ 的导函数分别为 $f'(x),g'(x)$，且 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$，则

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

②设 $a>0$，k 是大于 1 的正整数，若函数 $f(x)$ 满足：对任意 $x\in[0,a]$，均有 $f(x)\geqslant f\left(\frac{x}{k}\right)$ 成立，且 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$，则称函数 $f(x)$ 为区间 $[0,a]$ 上的 k 阶无穷递降函数.

结合以上两个信息，回答下列问题：

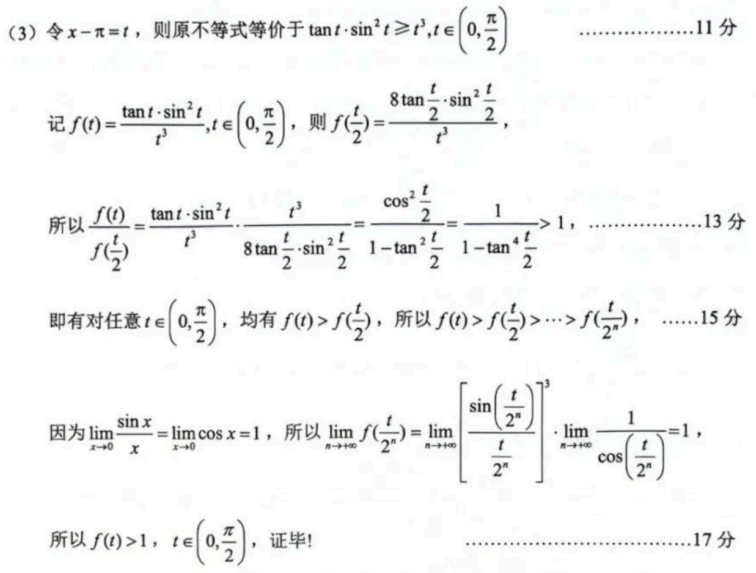
（1）试判断 $f(x)=x^3-3x$ 是否为区间 $[0,3]$ 上的 2 阶无穷递降函数；

（2）计算：$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$；

（3）证明：$\left(\frac{\sin x}{x-\pi}\right)^3<\cos x$，$x\in\left(\pi,\frac{3}{2}\pi\right)$.

题干中介绍了不完全版的洛必达法则（还需要说明使用条件），第（3）问要证明的三角不等式可以先转换到区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，再求导证明。

参考答案给的则是一种类似于无穷递降的方法：



（3）令 $x-\pi=t$，则原不等式等价于 $\tan t\cdot\sin^2 t\geqslant t^3, t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ .....11 分

记 $f(t)=\frac{\tan t\cdot\sin^2 t}{t^3}, t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则 $f\left(\frac{t}{2}\right)=\frac{8\tan\frac{t}{2}\cdot\sin^2\frac{t}{2}}{t^3}$，

所以 $\frac{f(t)}{f\left(\frac{t}{2}\right)}=\frac{\tan t\cdot\sin^2 t}{t^3}\cdot\frac{t^3}{8\tan\frac{t}{2}\cdot\sin^2\frac{t}{2}}=\frac{\cos^2\frac{t}{2}}{1-\tan^2\frac{t}{2}}=\frac{1}{1-\tan^4\frac{t}{2}}>1$，.....13 分

即有对任意 $t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，均有 $f(t)>f\left(\frac{t}{2}\right)$，所以 $f(t)>f\left(\frac{t}{2}\right)>\cdots>f\left(\frac{t}{2^n}\right)$，.....15 分

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$，所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}f\left(\frac{t}{2^n}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{\sin\left(\frac{t}{2^n}\right)}{\frac{t}{2^n}}\right]^3\cdot\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\cos\left(\frac{t}{2^n}\right)}=1$，

所以 $f(t)>1$，$t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，证毕! .....17 分

技巧性很强，但也是这个不等式的一种经典证明方法了。

用这个方法也可以证明如下不等式：

$$0<x<\frac{\pi}{2}\text{ 时，}\tan x+\sin x>2x.$$

读者可以自己尝试一下。

(当然用洛必达法则来证明 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ 有点无从吐槽，不如将题干改成介绍夹逼准则，再引导考生证明 $0<\sin x<x$ 这个经典不等式。)

接下来写一个我的证明：（都这么出题了，那我就不限制用到的工具了）

证明：

同上，只需证明：对 $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$，有

$$\begin{aligned} & \tan t \cdot \sin^2 t > t^3 \\ \iff & \frac{\tan t}{t} \cdot \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 > 1 \end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned} \frac{\tan t}{t} &= \int_0^1 \sec^2(tx)\mathrm{d}x \\ \frac{\sin t}{t} &= \int_0^1 \cos(tx)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

只需证明：

$$\int_0^1 \sec^2(tx)\mathrm{d}x \cdot \left(\int_0^1 \cos(tx)\mathrm{d}x\right)^2 > 1$$

由积分形式的 Hölder 不等式的推广（三个积分相乘）：

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \sec^2(tx)\mathrm{d}x \cdot \left(\int_0^1 \cos(tx)\mathrm{d}x\right)^2 \\ \geq & \int_0^1 \left(\sec(tx) \cdot \frac{1}{\sqrt{\cos(tx)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\cos(tx)}}\right)\mathrm{d}x \\ = & \int_0^1 \mathrm{d}x \\ = & 1 \end{aligned}$$

等号显然无法成立，证毕.