数学竞赛每日一练第 4 期解答

2021-06-07 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_260cee78efe98e57

给定一个正整数数 n. 求证：总能选取 n 的 $\varphi(n)+1$ 个约数（可以相同），使得其和恰好为 n.（这里 $\varphi(n)$ 为小于 n 且和 n 互素的正整数个数.）

解答（PDF 中已展开）

解答给出两个定义：

1. 如果正整数 n 能表示成其 $\varphi(n)+1$ 个约数之和，且其中至少有 3 个为 1，则称 n 为“幸运数”；
2. 如果正整数 n 能表示成其 $\varphi(n)+1$ 个约数之和，但其中 1 的数量少于 3，则称 n 为“伪幸运数”.

我们证明以下结论：

1. 除 2 和 4 外，所有素数的正整数次幂均为“幸运数”.

证明：注意到 $p^t=\underbrace{1+\cdots+1}_{\varphi(p^t)}+p^{t-1}$.

1. 如果 q，r 均为“幸运数”，且 $(q,r)=1$，则 qr 也为“幸运数”.

解答（PDF 中已展开）

证明：由定义可设：

$$q=a_1+\cdots+a_{\varphi(q)-2}+1+1+1$$
$$r=b_1+\cdots+b_{\varphi(r)-2}+1+1+1$$

于是

$$\begin{aligned}qr=&\left(a_1+\cdots+a_{\varphi(q)-2}\right)\left(b_1+\cdots+b_{\varphi(r)-2}\right)\\&+(1+1)\left(a_1+\cdots+a_{\varphi(q)-2}\right)\\&+(1+1)\left(b_1+\cdots+b_{\varphi(r)-2}\right)\\&+q+r+1+1+1\end{aligned}$$

上式展开后共有

$$(\varphi(q)-2)(\varphi(r)-2)+2(\varphi(q)-2)+2(\varphi(r)-2)+5$$

$$=\varphi(q)\varphi(r)+1$$
$$=\varphi(qr)+1$$

项，且每一项均为 qr 的约数，证毕.

1. 对任意奇数 n，$2n$ 和 $4n$ 为“伪幸运数”.

解答（PDF 中已展开）

证明：$\varphi(2n)=\varphi(n)$，将 n 的“幸运数”表达式中每一个数同时乘以 2，即得 $2n$ 的“伪幸运数”表达式.

设 $2n=b_1+\cdots+b_{\varphi(n)+1}$，于是

$$4n=2(b_1+\cdots+b_{\phi(n)})+2b_{\phi(n)+1}$$

上式展开后有 $2\varphi(n)+1=\varphi(4n)+1$ 项，证毕.

综上，所有正整数或为“幸运数”，或为“伪幸运数”，故本题结论成立.