Mathematical Reflections 2021 年第五期征解题

2021-10-15 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_26ae08d91055e4c4

初级组 (Junior Preblems)

J565. 设 $f(m,n)=(mn+4)^2+4(m-n)^2$. 求证：$f\left(2021^2,2023^2\right)$ 能被 $\left(2022^2+1\right)^2$ 整除.

J566. 设正实数 a，b，c，d 满足 $abc+bcd+cda+dab=1$. 求证：

$$\frac{1}{1+a^3}+\frac{1}{1+b^3}+\frac{1}{1+c^3}+\frac{1}{1+d^3}\leq\frac{16}{5}$$

J567. 设 x，y，z 为实数，$z\neq 0$，且满足

$$\left|\frac{y^2}{z}-2xz\right|\leq 2,\left|y^2z+\frac{2x}{z}\right|\leq 2$$

求 $x^{2022}+y^2$ 的最大值.

J568. 设 $\triangle ABC$ 为不等边三角形，M 为 BC 的中点. $\triangle AMB$ 的外接圆与 AC 交于点 D(异于点 A)，$\triangle AMC$ 的外接圆与 AB 交于点 E(异于点 A). 设 N 为 DE 的中点，求证：MN 和 $\triangle ABC$ 中的 A-陪位中线平行.

J569. 设 a，b，c 为正实数. 求证：

$$\sqrt[4]{\frac{2ab}{a^2+b^2}}+\sqrt[4]{\frac{2bc}{b^2+c^2}}+\sqrt[4]{\frac{2ca}{c^2+a^2}}+\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8abc}\geq 4$$

J570. 设 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，求证：

$$\left(\frac{\sin A+\sin B}{\cos C}\right)^2+\left(\frac{\sin B+\sin C}{\cos A}\right)^2+\left(\frac{\sin C+\sin A}{\cos B}\right)^2\geq 36.$$

高级组 (Senior Problems)

S565. 设 a，b，c，λ 为正实数，求证：

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{abc(\lambda+1)^3}{(a+\lambda b)(b+\lambda c)(c+\lambda a)}\geq 4$$

S566. 设 a，b，c，d 为正实数，且满足

$$abcd=3+2(a+b+c+d)+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$$

求证：

$$ab+ac+ad+bc+bd+cd\geq 3(a+b+c+d)+18$$

S567. 设正实数 x，y，z 满足 $x+y+z=1$，$(x-yz)(y-zx)(z-xy)>0$. 求证：

$$\frac{1}{x-yz}+\frac{1}{y-zx}+\frac{1}{z-xy}\geq\frac{2}{x+yz}+\frac{2}{y+zx}+\frac{2}{z+xy}$$

S568. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=60^\circ$，O 为外心，I 为内心. 设 M 为 AI 和 $\triangle ABC$ 外接圆的另一交点. 求证：若 $OI=IM$，则 $AB=\sqrt{2}AI$.

S569. 求所有十进制下的完全平方数，其由 1 个 6 和 n 个 1 所组成，其中 n 为正整数.

S570. 设正实数 a，b，c，d 满足

$$abc+abd+acd+bcd=ab+ac+ad+bc+bd+cd$$

且没有两个小于 1，而另外两个大于 1. 求证：

$$a+b+c+d-abcd\geq\frac{15}{16}$$

大学组 (Undergraduate Problems)

U565. 设 p 为素数，且整数 b_1，b_2，$\cdots$，b_{p-1} 构成模 p 的一个简化剩余系. 整数 a_1，a_2，$\cdots$，a_{p-1} 满足 $p\mid a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_{p-1}b_{p-1}$. 求证：存在 1，2，$\cdots$，$p-1$ 的一个排列 i_1，i_2，$\cdots$，i_{p-1}，使得如下循环矩阵的行列式也能被 p 整除：

$$\begin{pmatrix} a_{i_1} & a_{i_2} & \dots & a_{i_{p-2}} & a_{i_{p-1}} \\ a_{i_{p-1}} & a_{i_1} & a_{i_2} & & a_{i_{p-2}} \\ \vdots & a_{i_{p-1}} & a_{i_1} & \ddots & \vdots \\ a_{i_3} & & \ddots & \ddots & a_{i_2} \\ a_{i_2} & a_{i_3} & \dots & a_{i_{p-1}} & a_{i_1} \end{pmatrix}$$

U566. 求如下方程的实数解：

$$125^x+64^{\frac{1}{x}}+81\cdot 5^x\cdot 4^{\frac{1}{x}}=27^3$$

U567. 设 d 为一个正偶数，C 为一个复数. 求证：不存在次数至少为 2 的复系数多项式 $Q(x)$ 和 $R(x)$，使得

$$\left(x-1^2\right)\left(x-3^2\right)\dots\left(x-(d-1)^2\right)+C=Q(R(x))$$

U568. 设实数 $a>2$. 计算：

$$\int_0^a \frac{\tan^{-1} x}{ax^2 - ax + a - 1} dx$$

U569. 设 d 为正整数，$P(X) = a_0 + a_1 X + \ldots + a_d X^d$ 为正系数多项式. 求证：对任意在 $(0, \infty)$ 上均取正值的首一多项式 $f \in \mathbb{R}[X]$，存在正整数 m，使得 $P(X)^m f(X)$ 的所有系数均为非负数.

U570. 解如下微分方程：

$$\frac{dy}{dx} = \tan(x - y) + \cot(x - y)$$

奥林匹克问题 (Olympiad Problems)

O565. 设 a，b，c 为三角形的三边长，$s = \dfrac{a + b + c}{2}$ 为半周长，r 为内切圆半径. 记

$$x = \sqrt{\frac{s - a}{s}}, y = \sqrt{\frac{s - b}{s}}, z = \sqrt{\frac{s - c}{s}}.$$

设 $S = x + y + z$，$Q = xy + yz + zx$. 求证：

$$\frac{r}{s} \leq \frac{2S - \sqrt{4 - Q}}{9} \leq \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

O566. 设正实数 a，b，c 满足 $abc = 1$. 求证：

$$\frac{(a + b + 1)^2}{a^3 + b^3 + 1} + \frac{(b + c + 1)^2}{b^3 + c^3 + 1} + \frac{(c + a + 1)^2}{c^3 + a^3 + 1} \leq 9$$

O567. 设不等边 $\triangle ABC$ 的内心为 I，外心为 O. N 为 $\triangle ABC$ 的九点圆圆心，M 为 BC 的中点. 已知 OI 的中点在边 BC 上，求证：IM 和 AN 平行.

O568. 正实数 x，y，z 满足 $x^2 + y^2 + z^2 + xyz = 4$. 求证：

$$\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}\right)^2 + 11xyz \geq 20$$

O569. 正实数 a，b，c 满足 $a + b + c = ab + bc + ca$. 求证：

$$\frac{4abc}{(1 + a)(1 + b)(1 + c)} + 4 \leq \frac{3a}{1 + a} + \frac{3b}{1 + b} + \frac{3c}{1 + c} \leq 5$$

O570. 求所有十进制下的完全平方数，其由 1 个 4 和 n 个 9 所组成，其中 n 为正整数.