绝对值不等式：三角不等式与结构方法

2026-08-31　原文链接

本系列文章均由我提供完整思路、所有例题，并交给 GPT 整理排版而成.

往期文章链接：

平移、投影与 Cauchy：一类二次型不等式的处理方法

n 元不等式中的反证法：反设以后得到什么

不等式证明中的图论方法：团数、谱与路径结构的应用

离散型不等式：整数条件的几种基本用法

pdf 版下载链接：

绝对值不等式——三角不等式与结构方法.pdf

三角不等式 $|\sum u_i| \le \sum |u_i|$ 是绝对值问题中最常用的估计；在数轴上可写成 $|x-y| \le |x-t| + |t-y|$. 题目中的零和、排序、差分、分段和循环条件，往往用来决定怎样合并这些绝对值，或者使估计尽量接近等号. 以下分七节讨论，共选十九个例题.

0.1　1 三角不等式

使用三角不等式时，等号条件常和估计本身一样重要. 合并若干实数时，取等要求非零项同号；在 $|x-y| \le |x-t| + |t-y|$ 中，取等要求 t 位于 x, y 之间.

0.1.1　1.1 配对与整体合并

例 1（1995 年莫斯科数学奥林匹克 11 年级第 1 题） 对任意实数 x, y, z，证明

$$|x| + |y| + |z| \le |x+y-z| + |x-y+z| + |-x+y+z|.$$

分析： 记 $A = x+y-z$、$B = x-y+z$、$C = -x+y+z$. 三个式子满足 $A+B = 2x$、$A+C = 2y$、$B+C = 2z$.

不用讨论 A, B, C 各自的符号，只需两两配对：$|A| + |B| \ge 2|x|$，另外两组分别给出 $2|y|$ 和 $2|z|$. 三式相加后，$|A|, |B|, |C|$ 都出现两次，约去公因子即可.

证明： 由三角不等式，

$$\begin{aligned} |x+y-z| + |x-y+z| &\ge 2|x|, \\ |x+y-z| + |-x+y+z| &\ge 2|y|, \\ |x-y+z| + |-x+y+z| &\ge 2|z|. \end{aligned}$$

三式相加，右边原来的三个绝对值各出现两次，约去 2 即得证.

例 2（零和条件下的最佳常数） 对每个整数 $n \geq 2$，求最大的常数 c_n，使得对任意满足 $a_1 + \cdots + a_n = 0$ 的实数 $a_1, \ldots, a_n$，都有

$$c_n \sum_{i=1}^{n} |a_i| \leq \sum_{1 \leq i < j \leq n} |a_i - a_j|.$$

分析： 左边是 $\sum |a_i|$，右边是全部两两距离. 固定一个下标 i，先看 $\sum_j |a_i - a_j|$. 三角不等式给出

$$\sum_j |a_i - a_j| \geq \left| \sum_j (a_i - a_j) \right|.$$

由 $\sum_j a_j = 0$，右边等于 $n|a_i|$.

再对 i 求和. 每个无序数对 $\{i, j\}$ 在双重求和中出现两次，所以得到常数 $n/2$. 这一步只说明 $n/2$ 可以取；还要给出取等构造，才能证明它是最大值. 三角不等式取等要求同一组中的差同号，因此可从两层取值的数列着手.

解答： 对每个 i，

$$\sum_{j=1}^{n} |a_i - a_j| \geq \left| \sum_{j=1}^{n} (a_i - a_j) \right| = n|a_i|.$$

对 i 求和便有 $2 \sum_{i<j} |a_i - a_j| \geq n \sum_i |a_i|$，故 $c_n \geq n/2$.

当 $n \geq 3$ 时取

$$a_1 = a_2 = n - 2, \qquad a_3 = \cdots = a_n = -2,$$

则总和为 0，且两边比值恰为 $n/2$；$n = 2$ 时取 $(1, -1)$ 同样取到. 因此

$$\boxed{c_n = \frac{n}{2}}.$$

0.1.2 1.2 根式中的三角估计

例 3（2023 年中国国家集训队选拔题） 给定整数 $n \geq 2$. 求最小实数 λ，使得对任意实数 $a_1, \ldots, a_n, b$，恒有

$$\lambda \sum_{i=1}^{n} \sqrt{|a_i - b|} + \sqrt{n \left| \sum_{i=1}^{n} a_i \right|} \geq \sum_{i=1}^{n} \sqrt{|a_i|}.$$

分析： 令 $x_i = a_i - b$，并记 $S = \sum a_i$. 这样左边的 $\sqrt{|a_i - b|}$ 变成 $\sqrt{|x_i|}$，剩下的是用 S 和 x_i 表示 a_j.

由 $a_j = b + x_j$ 以及 $\sum x_i = S - nb$，整理得

$$na_j = S + (n-1)x_j - \sum_{i\neq j} x_i.$$

先用三角不等式，再用 $\sqrt{u+v} \le \sqrt{u}+\sqrt{v}$，便能把 $\sqrt{|a_j|}$ 控制在 $\sqrt{|S|}$ 和各个 $\sqrt{|x_i|}$ 之下. 对 j 求和后，每个 $\sqrt{|x_i|}$ 的总系数相同，所求常数随之确定.

检验最佳性时，可先令 $S=0$，使含 $\sqrt{|S|}$ 的部分消失，再按其余各步的等号条件安排 x_i.

解答： 答案为

$$\boxed{\lambda = \frac{n-1+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}}.$$

令

$$x_i = a_i - b, \qquad S = \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

对每个 j，

$$na_j = S + (n-1)x_j - \sum_{i\neq j} x_i.$$

由三角不等式以及 $\sqrt{u+v} \le \sqrt{u}+\sqrt{v}$，

$$\sqrt{n|a_j|} \le \sqrt{|S|} + \sqrt{n-1}\sqrt{|x_j|} + \sum_{i\neq j}\sqrt{|x_i|}.$$

对 j 求和，

$$\sqrt{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|a_j|} \le n\sqrt{|S|} + \left(n-1+\sqrt{n-1}\right)\sum_{i=1}^{n}\sqrt{|x_i|}.$$

除以 $\sqrt{n}$ 即得该常数可行.

再取

$$a_1 = \cdots = a_{n-1} = b = 1, \qquad a_n = -(n-1).$$

此时 $\sum a_i = 0$，并且

$$\sum_i \sqrt{|a_i - b|} = \sqrt{n}, \sum_i \sqrt{|a_i|} = n-1+\sqrt{n-1}.$$

故任何可行常数都不小于上面的 λ，故该常数不能再小.

0.2 2 零和条件与正负分解

若 $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$，设正项之和为 P、负项绝对值之和为 Q，则 $P = Q = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} |x_i|$. 许多零和问题由此化为两个非负数组的极值问题.

0.2.1 2.1 固定正负总量

例 4（平均数与绝对偏差） 已知 n 个实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的算术平均数为 a. 证明

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - a)^2 \le \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - a|\right)^2.$$

分析： 令 $y_k = x_k - a$. 由于 a 是平均数，$\sum y_k = 0$. 设正的 y_k 之和为 P，负的 y_k 的绝对值之和为 Q，则 $P = Q$，并且 $\sum |y_k| = 2P$.

对非负数有 $\sum u_i^2 \le (\sum u_i)^2$，所以正、负两组的平方和至多为 $P^2 + Q^2 = 2P^2$. 代入 $\sum |y_k| = 2P$ 即得所需不等式.

等号要求两组都把总量集中在一个位置上，因此高于平均数和低于平均数的项各至多有一个非零偏差.

证明： 令 $y_k = x_k - a$，则 $\sum y_k = 0$. 设正的 y_k 之和为 P，负的 y_k 的绝对值之和为 Q，于是

$$P = Q = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} |y_k|.$$

正、负两组分别有 $\sum_{y_k>0} y_k^2 \le P^2$、$\sum_{y_k<0} y_k^2 \le Q^2$，所以

$$\sum_{k=1}^{n} y_k^2 \le P^2 + Q^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|\right)^2.$$

代回 $y_k = x_k - a$ 即得结论. 等号成立当且仅当正的 y_k 至多有一个、负的 y_k 至多有一个；等价地，高于平均数与低于平均数的项分别至多有一个.

0.2.2 2.2 离散极值与取等

例 5（2025 年沙特阿拉伯数学竞赛第 3 题） 设

$$a_1 \le \cdots \le a_{50}, \qquad \sum_{i=1}^{50} a_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{50} |a_i| = 624.$$

求

$$S = a_{50} - a_1$$

的最小值，并求

$$T = a_1 a_2 \cdots a_{50}$$

的最大值.

分析： 由 $\sum a_i = 0$、$\sum |a_i| = 624$，正项之和与负项绝对值之和都等于 312. 设负数有 k 个.

求极差时，最小项的绝对值至少为 $312/k$，最大项至少为 $312/(50-k)$，所以 $a_{50} - a_1$ 得到一个只含整数 k 的下界. 比较 $1 \le k \le 49$ 即可求最小值.

求乘积时，若最大乘积为正，k 必须为偶数. 固定 k 后，正、负两组的总量都已固定；均值不等式表明，同组各项绝对值相等时乘积最大. 余下只需比较各个允许的偶数 k.

解答： 设负数有 k 个，则

$$-a_1 \ge \frac{312}{k}, \qquad a_{50} \ge \frac{312}{50-k}.$$

因此

$$S = a_{50} - a_1 \ge 312\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{50-k}\right) \ge \frac{624}{25}.$$

当

$$a_1 = \cdots = a_{25} = -\frac{312}{25}, \qquad a_{26} = \cdots = a_{50} = \frac{312}{25}$$

时取等，所以

$$\boxed{S_{\min} = \frac{624}{25}}.$$

下面求乘积. 已有正值构造，因此最大值必为正；含零项时乘积为 0，负数个数为奇数时乘积为负，均不可能最优. 故只需考虑负数个数 k 为偶数的情形，记 $h = 50 - k$. 分别对负项绝对值与正项使用均值不等式，

$$T \le \left(\frac{312}{k}\right)^k \left(\frac{312}{h}\right)^h.$$

在 $k + h = 50$ 下，右端等价于使 $k^k h^h$ 尽可能小. 函数

$$\varphi(x) = x \log x + (50 - x)\log(50 - x)$$

在 $(0, 50)$ 上严格凸，并关于 $x = 25$ 对称；限制 k 为偶数后，最优为

$$(k, h) = (24, 26) \quad \text{或} \quad (26, 24).$$

于是

$$T \le 13^{24}12^{26}.$$

取前 24 项全为 -13、后 26 项全为 12 即可取等，故

$$\boxed{T_{\max} = 13^{24}12^{26}}.$$

0.3 3 排序与两两距离

含有大量 $|x_i - x_j|$ 时，先排序 $x_1 \le \cdots \le x_n$. 于是

$$\sum_{i<j} |x_i - x_j| = \sum_{k=1}^{n} (2k - n - 1)x_k = \sum_{k=1}^{n-1} k(n-k)(x_{k+1} - x_k).$$

两种写法分别适合直接比较变量和比较相邻间隔.

0.3.1 3.1 距离和的线性化

例 6（2024 年罗马尼亚 IMO 队选） 固定整数 $n \ge 2$. 对不全相等的实数 $a_1, \ldots, a_n$，记

$$d = \max_{i<j} |a_i - a_j|, \qquad s = \sum_{i<j} |a_i - a_j|.$$

求 s/d 的最小值与最大值.

分析： 不妨排序为 $a_1 \le \cdots \le a_n$，并记 $\Delta_k = a_{k+1} - a_k$. 直径为 $d = \sum_{k=1}^{n-1} \Delta_k$.

计算总距离时，固定一段间隔 Δ_k. 只有一个点取在前 k 个位置、另一个点取在后 $n-k$ 个位置时，这段间隔才会被计入，共有 $k(n-k)$ 个数对. 因此

$$s = \sum_{k=1}^{n-1} k(n-k)\Delta_k.$$

于是 s/d 是各个 $k(n-k)$ 关于非负权 Δ_k 的加权平均. 上下界分别由这些系数的最小值和最大值给出；取等时让非零间隔落在相应位置即可.

解答： 不妨设 $a_1 \le \cdots \le a_n$，并令 $\Delta_k = a_{k+1} - a_k \ge 0$. 则

$$d = \sum_{k=1}^{n-1} \Delta_k, \qquad s = \sum_{k=1}^{n-1} k(n-k)\Delta_k.$$

而

$$n - 1 \le k(n-k) \le \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor.$$

因此

$$(n-1)d \le s \le \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor d.$$

把全部跨度集中在第一段可取到下界；集中在中间一段可取到上界. 故

$$\boxed{\min \frac{s}{d} = n-1}, \qquad \boxed{\max \frac{s}{d} = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor}.$$

例 7（区间内两两距离的上界） 设 n 为正整数，且 $0 \le x_1, \dots, x_n \le 1$. 证明

$$2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |x_i - x_j| \le n^2.$$

分析： 排序后有

$$\sum_{i<j} |x_i - x_j| = \sum_{k=1}^{n} (2k-n-1)x_k.$$

系数随 k 递增，前半部分为负，后半部分为正. 又有 $0 \le x_1 \le \cdots \le x_n \le 1$.

要使这个线性式最大，负系数对应的变量取 0，正系数对应的变量取 1；这样的取值与排序条件相容. 因此极值可在端点配置中取得. 分别把 n 为偶数、奇数时的正系数相加即可.

证明： 不妨设 $0 \le x_1 \le \cdots \le x_n \le 1$. 则

$$\begin{aligned} 2\sum_{i,j} |x_i - x_j| &= 4\sum_{i<j} (x_j - x_i) \\ &= 4\sum_{k=1}^{n} (2k-n-1)x_k. \end{aligned}$$

系数 $2k-n-1$ 随 k 递增. 因此最大值在前半部分取 0、后半部分取 1 时出现.

若 $n = 2m$，最大值为

$$4(1 + 3 + \cdots + (2m-1)) = 4m^2 = n^2.$$

若 $n = 2m+1$，最大值为

$$4(2 + 4 + \cdots + 2m) = 4m(m+1) = n^2 - 1 < n^2.$$

故结论成立；事实上奇数情形还可加强为 $n^2 - 1$.

0.3.2 3.2 前缀和与交叉配对

例 8（正整数的“自距离”条件） 设 $a_1, a_2, \ldots, a_{2023}$ 为正整数，并且对每个 $1 \le k \le 2023$ 都有

$$a_k = \sum_{i=1}^{2023} |a_i - a_k|.$$

求 $a_1 + \cdots + a_{2023}$ 的最小值.

分析： 先排序 $a_1 \le \cdots \le a_{2023}$. 第 k 个数到左侧、右侧各点的距离都能用前缀和表示. 记 $S_k = a_1 + \cdots + a_k$、$S = S_{2023}$，整理第 k 个条件可得

$$(2024 - 2k)a_k = S - 2S_k.$$

比较相邻的第 k、$k+1$ 个方程，前缀和只差一个 a_{k+1}，大部分项相消，得到

$$(2024 - 2k)(a_{k+1} - a_k) = 0.$$

因此除 $k = 1012$ 外，其余相邻项都相等，数列只能由两段常值组成. 代回原条件即可确定两段之间的关系.

解答： 不妨设

$$a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_{2023}.$$

记 $S_k = a_1 + \cdots + a_k$，$S = S_{2023}$. 题设化为

$$\begin{aligned} a_k &= \sum_{i=1}^{k} (a_k - a_i) + \sum_{i=k+1}^{2023} (a_i - a_k) \\ &= (2k - 2023)a_k + S - 2S_k, \end{aligned}$$

即

$$(2024 - 2k)a_k = S - 2S_k. \tag{1}$$

把 k 换成 $k+1$ 并用 $S_{k+1} = S_k + a_{k+1}$，得到

$$(2024 - 2k)a_{k+1} = S - 2S_k. \tag{2}$$

于是

$$(2024 - 2k)(a_{k+1} - a_k) = 0.$$

除 $k=1012$ 外，其余相邻项全部相等．又因所有 a_i 均为正整数，若两段取同一数值，则题设右端恒为 0，与左端为正矛盾；因此确有两段不同的常值．故可写成

$$a_1=\cdots=a_{1012}=a,\qquad a_{1013}=\cdots=a_{2023}=b,\qquad a<b.$$

代回题设，分别得到

$$a=1011(b-a),\qquad b=1012(b-a).$$

令 $d=b-a$，则 d 为正整数，且

$$a=1011d,\qquad b=1012d.$$

因此

$$\sum_{i=1}^{2023}a_i=1012a+1011b=2\cdot1011\cdot1012\,d.$$

最小值在 $d=1$ 时取得，即

$$\boxed{2046264}.$$

例 9（两组互异整数之间的距离） 把 $2n\,(n\geq 2)$ 个互不相同的整数分成两组 $a_1,\ldots,a_n$ 与 $b_1,\ldots,b_n$．证明

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_i-b_j|-\sum_{1\leq i<j\leq n}\big(|a_j-a_i|+|b_j-b_i|\big)\geq n.$$

分析： 分别排序 $a_1<\cdots<a_n$、$b_1<\cdots<b_n$．右边含两组内部距离，因此对每个 $i<j$，用两条交叉距离 $|a_j-b_i|$ 和 $|a_i-b_j|$ 与之比较：

$$|a_j-b_i|+|a_i-b_j|\geq(a_j-a_i)+(b_j-b_i).$$

对所有 $i<j$ 求和后，两组内部距离已全部被控制．

左边还剩下 $|a_i-b_i|$ 这些对角项．由于 $2n$ 个整数互不相同，每个 $|a_i-b_i|\geq1$，余下各项之和至少为 n．

证明： 分别排序为 $a_1<\cdots<a_n$、$b_1<\cdots<b_n$．对 $i<j$，

$$|a_j-b_i|\geq a_j-b_i,\qquad |a_i-b_j|\geq b_j-a_i.$$

相加得到

$$|a_j - b_i| + |a_i - b_j| \geq (a_j - a_i) + (b_j - b_i).$$

对所有 $i < j$ 求和，再补上 $\sum_i |a_i - b_i|$，便有

$$\sum_{i,j} |a_i - b_j| \geq \sum_{i<j} \big(|a_j - a_i| + |b_j - b_i|\big) + \sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i|.$$

所有 $2n$ 个整数互不相同，所以 $|a_i - b_i| \geq 1$. 故结论成立.

0.4 4 差分与递推换元

相邻项或二阶差分出现时，常令 $d_i = a_{i+1} - a_i$. 这样，跨度 $a_j - a_i$ 是一段连续差分的和，二阶差分也变成相邻 d_i 的差. 若绝对值内部已有递推关系，也可直接把内部量设为新变量.

0.4.1 4.1 一阶差分

例 10（差分写法） 设 $a_0 = 0$，$a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. 证明

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k(a_k - a_{k-1})| \leq \frac{n+1}{2} \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1})^2.$$

分析： 令 $b_k = a_k - a_{k-1}$. 则 $a_k = b_1 + \cdots + b_k$，左边可以完全改写成 $b_1, \ldots, b_n$ 的式子.

由三角不等式，

$$|a_k b_k| \leq |b_k| \sum_{j=1}^{k} |b_j|.$$

全部相加后只有平方项 b_k^2 和交叉项 $|b_j b_k|$. 对交叉项使用 $2|b_j b_k| \leq b_j^2 + b_k^2$，最后统计每个 b_r^2 一共出现多少次. 这个计数给出系数 $(n+1)/2$.

证明： 记 $b_k = a_k - a_{k-1}$. 于是 $a_k = \sum_{j=1}^{k} b_j$，故 $|a_k| \leq \sum_{j=1}^{k} |b_j|$，从而

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| &\leq \sum_{k=1}^{n} |b_k| \sum_{j=1}^{k} |b_j| \\ &= \sum_{k=1}^{n} b_k^2 + \sum_{1 \leq j < k \leq n} |b_j b_k|. \end{aligned}$$

再用

$$2|b_j b_k| \leq b_j^2 + b_k^2.$$

所有交叉项一共给每个 b_r^2 增加 $(n-1)/2$ 的系数，因此

$$\sum_{k=1}^{n}|a_kb_k|\le\frac{n+1}{2}\sum_{k=1}^{n}b_k^2.$$

0.4.2 4.2 二阶差分

例 11（2017 年东南数学奥林匹克第 4 题） 设实数 $a_1,a_2,\dots,a_{2017}$ 满足

$$a_1=a_{2017},\qquad |a_i+a_{i+2}-2a_{i+1}|\le 1\quad(1\le i\le 2015).$$

求

$$\max_{1\le i<j\le 2017}|a_i-a_j|$$

的最大可能值.

分析： 令 $d_i=a_{i+1}-a_i$. 题设化为 $|d_{i+1}-d_i|\le 1$，而 $a_1=a_{2017}$ 又给出 $\sum d_i=0$. 任意跨度 a_q-a_p 都是一段连续 d_i 的和.

设这段有 m 项，和为 P；补集的和就是 $-P$. 两段平均值分别为 P/m 和 $-P/(N-m)$. 它们的差可写成跨越两段的 d_i-d_j 的平均，而 $|d_i-d_j|\le|i-j|$.

于是问题化为一个下标计数：跨越两段的 $|i-j|$ 的平均是多少. 计算后得到 $P\le m(N-m)/2$，再在允许的 m 中取最大值.

解答： 记 $N=2016$，并令

$$d_i=a_{i+1}-a_i\qquad(1\le i\le N).$$

则

$$|d_{i+1}-d_i|\le 1,\qquad\sum_{i=1}^{N}d_i=0.\tag{1}$$

任取 $p<q$，设

$$I=\{p,p+1,\dots,q-1\},\qquad |I|=m,$$

并记

$$P=\sum_{i\in I}d_i=a_q-a_p.$$

若 $P<0$，交换 p,q 后只需估计 $-P$，故以下设 $P\ge 0$. 由 (1)，补集 J 上的和为 $-P$. 因此

$$\frac{P}{m}+\frac{P}{N-m}=\frac{1}{m(N-m)}\sum_{\substack{i\in I\\ j\in J}}(d_i-d_j).$$

又由 $|d_i-d_j|\le|i-j|$，

$$\frac{NP}{m(N-m)}\le\frac{1}{m(N-m)}\sum_{\substack{i\in I\\ j\in J}}|i-j|. \tag{2}$$

若 $I=\{r+1,\dots,r+m\}$，右端分子等于

$$\frac{m}{2}\Big(N(N-m)-2r(N-m-r)\Big)\le\frac{mN(N-m)}{2}.$$

代入 (2)，得到

$$P\le\frac{m(N-m)}{2}\le\frac{N^2}{8}.$$

所以

$$|a_q-a_p|\le\frac{2016^2}{8}=508032.$$

取

$$d_i=\frac{2017}{2}-i\qquad(1\le i\le 2016).$$

则 $d_{i+1}-d_i=-1$，且 $\sum d_i=0$. 令 $a_1=0$， $a_{k+1}=a_k+d_k$，便有 $a_{2017}=a_1$，并且

$$a_{1009}-a_1=\sum_{i=1}^{1008}d_i=508032.$$

故所求最大值为

$$\boxed{508032}.$$

0.4.3 4.3 递推换元

例 12（2023 年保加利亚数学奥林匹克第 5 题） 设实数 $x_1,\dots,x_n$ 满足 $|x_1|+\cdots+|x_n|=1$. 求

$$|x_1|+|x_1-x_2|+|x_1+x_2-x_3|+\cdots+|x_1+\cdots+x_{n-1}-x_n|$$

的最小值.

分析：把绝对值内部设为

$$y_k = x_1 + \cdots + x_{k-1} - x_k,$$

并记 $s_k = x_1 + \cdots + x_k$. 两者满足 $y_k = 2s_{k-1} - s_k$，即 $s_k = 2s_{k-1} - y_k$.

这个递推可以逐步写出 s_k，继而写出 $x_k = s_k - s_{k-1}$. 系数按 $1, 2, 4, \ldots$ 增长，所以三角不等式给出

$$\sum |x_k| \le 2^{n-1} \sum |y_k|.$$

由于已知 $\sum |x_k| = 1$，由 $\sum |x_k| = 1$ 便得到目标式的下界. 取等时可令 y_1 非零、其余 y_k 为零.

解答：当 $n = 1$ 时结论显然. 以下设 $n \ge 2$. 令 $s_k = x_1 + \cdots + x_k$，$s_0 = 0$，以及

$$y_k = s_{k-1} - x_k = 2s_{k-1} - s_k.$$

于是

$$s_k = 2s_{k-1} - y_k = -\sum_{j=1}^{k} 2^{k-j} y_j.$$

因此

$$x_k = s_k - s_{k-1} = -y_k - \sum_{j=1}^{k-1} 2^{k-1-j} y_j.$$

取绝对值并对 k 求和，

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} |x_k| &\le \sum_{j=1}^{n} 2^{n-j} |y_j| \\ &\le 2^{n-1} \sum_{j=1}^{n} |y_j|. \end{aligned}$$

由题设 $\sum |x_k| = 1$，得到

$$\sum_{j=1}^{n} |y_j| \ge 2^{1-n}.$$

故所求式不小于该值.

令

$$y_1 = 2^{1-n}, \qquad y_2 = \cdots = y_n = 0.$$

由上面的递推式得到

$$x_1 = x_2 = -2^{1-n}, \qquad x_k = -2^{k-1-n} \quad (3 \le k \le n),$$

此时 $\sum |x_k| = 1$，且目标值为 2^{1-n}. 故最小值为

$$\boxed{2^{1-n}}.$$

0.5 5 分段线性与符号化

绝对值函数在相邻折点之间是线性的. 处理这类问题时，可以比较各段斜率，也可以先固定符号；含有最大值时，还可用

$$x_+ = \frac{x + |x|}{2}, \qquad x_- = \frac{x - |x|}{2}, \qquad \max\{u, v\} = \frac{u + v + |u - v|}{2}$$

改写成统一的代数式.

0.5.1 5.1 折点与斜率

例 13（2003 年 AMC 12B 第 24 题） 正整数 $a < b < c$，方程组

$$2x + y = 2003, \qquad y = |x - a| + |x - b| + |x - c|$$

恰有一组解. 求 c 的最小值.

分析： 令 $f(x) = |x - a| + |x - b| + |x - c|$，再与直线 $2003 - 2x$ 比较. 函数 f 在四个区间上的斜率依次为 $-3, -1, 1, 3$，因此

$$g(x) = f(x) - (2003 - 2x)$$

的斜率依次为 $-1, 1, 3, 5$.

所以 g 在 $x < a$ 时严格递减，在 $x > a$ 时严格递增，最低点在折点 $x = a$. 方程组恰有一个解，当且仅当这个最低点等于 0，即 $g(a) = 0$. 由此得到 $b + c = 2003$，余下只需处理正整数条件.

解答： 写成分段形式：

$$f(x) = \begin{cases} -3x + a + b + c, & x < a, \\ -x - a + b + c, & a \le x < b, \\ x - a - b + c, & b \le x < c, \\ 3x - a - b - c, & x \ge c. \end{cases}$$

令 $g(x)=f(x)-(2003-2x)$. 在四个区间上，g 的斜率依次为 $-1,1,3,5$，因此 g 在 $(-\infty,a]$ 上严格递减，在 $[a,\infty)$ 上严格递增. 方程组恰有一组解，当且仅当 $g(a)=0$，即 $b+c-2a=2003-2a$，所以 $b+c=2003$. 由于 $b<c$ 且 b,c 为正整数，必有 $c\geq 1002$. 取例如

$$a=1,\qquad b=1001,\qquad c=1002,$$

便有 $g(a)=0$，且其余处 $g(x)>0$，所以确实只有一个交点. 故

$$\boxed{c_{\min}=1002}.$$

0.5.2 5.2 区间定号

例 14（2018 年亚太地区数学奥林匹克第 2 题） 设

$$f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x-2}+\cdots+\frac{1}{x-2018},$$
$$g(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-3}+\cdots+\frac{1}{x-2017}.$$

证明：当 $0<x<2018$ 且 x 不是整数时，

$$|f(x)-g(x)|>2.$$

分析：把两式作差：

$$f(x)-g(x)=\sum_{k=0}^{2018}\frac{(-1)^k}{x-k}.$$

写 $x=m+t$，其中 $m=\lfloor x\rfloor$、$0<t<1$，则各分母的符号都已确定. 乘以 $(-1)^m$ 后，离 x 最近的两项为 $1/t$ 与 $1/(1-t)$，其和至少为 4.

其余项分成左右两条绝对值递减的交错和. 每条交错尾项都大于它的第一个负项，因而分别大于 -1. 所以两条尾项的总损失小于 2，而最近两项之和至少为 4，所求差严格大于 2.

证明：记

$$h(x)=f(x)-g(x)=\sum_{k=0}^{2018}\frac{(-1)^k}{x-k}.$$

写 $x=m+t$，其中 $m=\lfloor x\rfloor$、$0<t<1$. 则

$$(-1)^m h(x)=\frac{1}{t}+\frac{1}{1-t}$$
$$+\sum_{r=1}^{m}\frac{(-1)^r}{t+r}+\sum_{s=2}^{2018-m}\frac{(-1)^{s+1}}{s-t}.$$

第一条尾项从 $-1/(1+t)$ 开始，且绝对值递减，所以

$$\sum_{r=1}^{m}\frac{(-1)^r}{t+r}>-\frac{1}{1+t}>-1;$$

若 $m=0$，该和为 0，结论同样成立. 第二条尾项同理满足

$$\sum_{s=2}^{2018-m}\frac{(-1)^{s+1}}{s-t}>-\frac{1}{2-t}>-1.$$

又有

$$\frac{1}{t}+\frac{1}{1-t}=\frac{1}{t(1-t)}\geq 4.$$

因此

$$(-1)^m h(x)>4-1-1=2,$$

从而

$$|f(x)-g(x)|=|h(x)|>2.$$

0.5.3 5.3 正负部与最大值

例 15（2024 年土耳其 IMO 队选第 6 题） 求最小实数 λ，使得对任意整数 $n\geq 3$ 及任意实数 $a_1,\ldots,a_n$，在下标按模 n 理解并定义

$$b_i=\frac{a_i+\max\{a_{i+1},a_{i+2}\}}{2}$$

后，恒有

$$\lambda\sum_{i=1}^{n}(a_i-a_{i+1})^{2024}\geq\sum_{i=1}^{n}(b_i-b_{i+1})^{2024}.$$

分析： 令 $x_i=a_i-a_{i+1}$. 最大值 $\max\{a_{i+1},a_{i+2}\}$ 只取决于 x_{i+1} 的符号，于是引入

$$y_i=\frac{x_i+|x_i|}{2},\qquad z_i=\frac{x_i-|x_i|}{2}.$$

这样 $y_i\geq 0$、$z_i\leq 0$，所有最大值项都可统一表示. 化简得

$$b_i-b_{i+1}=\frac{x_i+y_{i+1}+z_{i+2}}{2}.$$

对 2024 次幂先用凸性，再利用 y_{i+1} 与 z_{i+2} 异号，得到 $|y_{i+1}+z_{i+2}|^{2024} \le y_{i+1}^{2024}+z_{i+2}^{2024}$. 循环求和后， $y_i^{2024}+z_i^{2024}=|x_i|^{2024}$，于是 $\lambda=1$ 可行.

证明最佳性时，取很长的 $+1$、-1 差分段，只有少数交界处不能取等，便能使所需常数逼近 1.

解答： 记 $p=2024$，并令 $x_i=a_i-a_{i+1}$， $y_i=(x_i+|x_i|)/2$， $z_i=(x_i-|x_i|)/2$. 则 $y_i\ge 0, z_i\le 0$，并且 $y_i+z_i=x_i$、 $y_i^p+z_i^p=|x_i|^p$. 由最大值公式可化得

$$b_i-b_{i+1}=\frac{x_i+y_{i+1}+z_{i+2}}{2}.$$

因此

$$|b_i-b_{i+1}|^p \le \frac{1}{2}\left(|x_i|^p+|y_{i+1}+z_{i+2}|^p\right).$$

由于 y_{i+1} 与 z_{i+2} 异号，

$$|y_{i+1}+z_{i+2}|^p \le y_{i+1}^p+z_{i+2}^p.$$

对 i 循环求和，

$$\sum_i |b_i-b_{i+1}|^p \le \frac{1}{2}\sum_i \left(|x_i|^p+y_{i+1}^p+z_{i+2}^p\right)=\sum_i |x_i|^p.$$

由于 p 为偶数，故 $\lambda=1$ 可行.

另一方面，取偶数 $N=2m$，令循环差 x_i 的前 m 项为 1、后 m 项为 -1. 这些差的和为 0，因此确能由某个循环数列 a_i 产生. 除至多四个交界位置外， $|b_i-b_{i+1}|=1$，于是任何可行常数都满足

$$\lambda N \ge N-4.$$

令 $N\to\infty$，得 $\lambda\ge 1$. 故

$$\boxed{\lambda=1}.$$

0.6 6 循环结构与奇偶性

循环排列还要满足首尾相接的条件. 差分的符号、正负交错能否闭合，都可能随奇偶性改变. 若三点单调，则 $|x-y|+|y-z|=|x-z|$，奇数循环中的删点正是利用这一等号情形.

0.6.1 6.1 变号位置

例 16（2025 年日本数学奥林匹克） 设整数 $n\ge 2$，实数 $a_1,\dots,a_{2n}$ 满足 $|a_k-a_{n+k}|\ge 1$ $(1\le k\le n)$. 求

$$\sum_{k=1}^{2n}(a_k - a_{k+1})^2, \qquad a_{2n+1} = a_1,$$

的最小值.

分析： 记 $d_k = a_k - a_{n+k}$. 题设给出 $|d_k| \geq 1$. 另一方面，

$$d_k - d_{k+1} = (a_k - a_{k+1}) - (a_{n+k} - a_{n+k+1}),$$

所以若有 $|d_k - d_{k+1}| \geq 2$，便可用 $x^2 + y^2 \geq (x-y)^2/2$ 得到两条相邻边的平方和至少为 2.

把序列补成 $d_1, d_2, \ldots, d_n, -d_1$. 首尾异号，而各项绝对值都不小于 1，途中必有一对相邻项异号. 这一对的距离至少为 2，所需位置由此得到.

解答： 记 $d_k = a_k - a_{n+k}$ $(1 \leq k \leq n)$，并令 $d_{n+1} = -d_1$. 每个 $|d_k| \geq 1$，而 d_1, d_{n+1} 异号，故存在 m 使 d_m, d_{m+1} 异号. 于是

$$|d_m - d_{m+1}| \geq 2.$$

又

$$d_m - d_{m+1} = (a_m - a_{m+1}) - (a_{n+m} - a_{n+m+1}).$$

由

$$x^2 + y^2 \geq \frac{(x-y)^2}{2},$$

得到

$$(a_m - a_{m+1})^2 + (a_{n+m} - a_{n+m+1})^2 \geq 2.$$

其余平方项非负，所以原式至少为 2. 取

$$a_1 = \cdots = a_n = 1, \qquad a_{n+1} = \cdots = a_{2n} = 0,$$

恰有原式等于 2. 因此最小值为 2.

0.6.2 6.2 奇偶交错与删点

在后两题中要用到下面的事实.

引理： 设 n 为奇数，实数 $x_1, \ldots, x_n$ 按圆周排列，下标按模 n 理解. 则存在某个 i，使 $x_i \leq x_{i+1} \leq x_{i+2}$ 或 $x_i \geq x_{i+1} \geq x_{i+2}$.

证明： 令 $d_i = x_{i+1} - x_i$. 若某个 $d_i = 0$，结论立即成立. 否则，若不存在这样的三项，则每个 d_i 与 d_{i+1} 都异号，所以 $d_1, d_2, \ldots, d_n$ 的符号沿圆周严格交替. 但 n 为奇数，首尾处不可能仍保持异号，矛盾.

若 x_i, x_{i+1}, x_{i+2} 单调，则三角不等式取等：

$$|x_i - x_{i+1}| + |x_{i+1} - x_{i+2}| = |x_i - x_{i+2}|.$$

因此在循环总变差中，可以删去中间项而不改变这两条边的总长度.

例 17（循环总变差的最大值） 设整数 $n \geq 2$，实数 $a_1, \ldots, a_n$ 满足 $a_1^2 + \cdots + a_n^2 = 1$. 求

$$V = |a_1 - a_2| + \cdots + |a_{n-1} - a_n| + |a_n - a_1|$$

的最大值.

分析： 先处理偶数 n. 逐边使用 $|a_i - a_{i+1}| \leq |a_i| + |a_{i+1}|$，求和得

$$V \leq 2 \sum |a_i| \leq 2\sqrt{n}.$$

取等时，相邻项需异号，且各项绝对值相等；偶数个位置可以正负交错，因此上界能够达到.

若 n 为奇数，正负严格交错时，奇数个位置无法首尾相接. 圆周引理给出相邻三项单调，删去中间项时 $|x-y| + |y-z| = |x-z|$，循环总变差不变. 删去一项后剩下偶数个变量，且平方和不超过 1，故由偶数情形得到 $2\sqrt{n-1}$. 取一项为 0，其余等模交错，即可取等.

解答： 若 n 为偶数，则

$$V \leq 2 \sum_{i=1}^{n} |a_i| \leq 2\sqrt{n \sum a_i^2} = 2\sqrt{n}.$$

取

$$a_1 = a_3 = \cdots = \frac{1}{\sqrt{n}}, \qquad a_2 = a_4 = \cdots = -\frac{1}{\sqrt{n}},$$

可取等.

若 n 为奇数，由引理可重新编号，使 a_n 位于 a_{n-1} 与 a_1 之间. 于是

$$|a_{n-1} - a_n| + |a_n - a_1| = |a_{n-1} - a_1|.$$

删去 a_n 后，V 就是 $n-1$ 个数的循环总变差. 由偶数情形，

$$V \leq 2\sqrt{(n-1) \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2} \leq 2\sqrt{n-1}.$$

取 $a_n=0$，其余 $n-1$ 项交替取 $\pm1/\sqrt{n-1}$，可达到上界．故

$$\boxed{V_{\max}=\begin{cases}2\sqrt{n}, & n\text{ 为偶数},\\ 2\sqrt{n-1}, & n\text{ 为奇数}.\end{cases}}$$

例 18（2022 年高中联赛 B 卷二试第 2 题） 设整数 $n\geq 2$，给定正数 $a<b$，且 $x_1,\ldots,x_n\in[a,b]$．求

$$R=\frac{|x_1-x_2|+\cdots+|x_n-x_1|}{x_1+\cdots+x_n}$$

的最大值．

分析： 先建立二元估计．对 $x,y\in[a,b]$，

$$|x-y|\leq\frac{b-a}{b+a}(x+y).$$

偶数 n 时，对所有相邻对求和，每个 x_i 在右边出现两次，得到所需上界；令 a,b 交错即可取等．

奇数 n 时，不能在圆周上完全交错．由圆周引理删去一个位于两邻点之间的变量，分子保持不变，剩余变量个数变为偶数．对剩余循环使用上面的二元估计，再把被删变量至少为 a、每条边至多为 $b-a$ 代入，即可得到奇数情形的上界．

解答： 记

$$c=\frac{b-a}{b+a}.$$

对任意 $x,y\in[a,b]$，有

$$|x-y|\leq c(x+y).\tag{1}$$

若 n 为偶数，对所有相邻对使用 (1)，得

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i-x_{i+1}|\leq 2c\sum_{i=1}^{n}x_i,$$

故

$$R\leq\frac{2(b-a)}{a+b}.$$

取 $a,b,a,b,\ldots$ 交错即可取等．

若 n 为奇数，由引理可删去一个位于两邻点之间的 x_k，分子保持不变．记删去后的分子为 T、其余 $n-1$ 项之和为 S'．对这 $n-1$ 个数应用偶数情形，

$$T \le 2cS', \qquad S' \ge \frac{T}{2c}.$$

同时，删去后只有 $n-1$ 条边，每条长度不超过 $b-a$，所以

$$T \le (n-1)(b-a).$$

原分母至少为 $S'+a$，从而

$$R \le \frac{T}{T/(2c)+a}.$$

右端随 T 增大而增大，代入 $T \le (n-1)(b-a)$，得到

$$R \le \frac{2(n-1)(b-a)}{(n-1)b+(n+1)a}.$$

取 $(n-1)/2$ 个 b 与 $(n+1)/2$ 个 a，尽量交错，使圆周上只有一对相邻的 a，即可取等．因此

$$\boxed{R_{\max} = \begin{cases} \dfrac{2(b-a)}{a+b}, & n \text{ 为偶数}, \\ \dfrac{2(n-1)(b-a)}{(n-1)b+(n+1)a}, & n \text{ 为奇数}. \end{cases}}$$

0.7　7 平移与折点

若一边只含 $x_i - x_j$，共同平移所有变量不会改变它；含 $x_i + x_j$ 的另一边则随平移量变化．把平移量作为参数，折点处常会出现零项或相反数对，从而可以删项归纳.

0.7.1　7.1 折点与删项

例 19（2021 年国际数学奥林匹克第 2 题） 设 n 为正整数．对任意实数 $x_1, \dots, x_n$，证明

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i - x_j|} \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i + x_j|}.$$

分析： 左边只含 $x_i - x_j$，共同平移 $x_i \mapsto x_i + t$ 不会改变它．因此把右边写成

$$H(t) = \sum_{i,j}\sqrt{|x_i + x_j + 2t|}$$

并选择使 $H(t)$ 最小的平移量.

H 的折点为 $t = -(x_i + x_j)/2$．在两个相邻折点之间，各项的符号固定，而 $t \mapsto \sqrt{|x_i + x_j + 2t|}$ 为凹函数；因此 H 在该区间的最小值只能出现在端点．最左、最右两个区间再看单调性，可知全局最小值在某个折点取得.

在这个折点平移后，存在 $y_r + y_s = 0$. 若 $r = s$，出现一个零变量；若 $r \neq s$，出现一对 $c, -c$. 删去这个零变量或这对相反数时，左右两边减少的量相同，于是把问题降到 $n-1$ 或 $n-2$ 个变量，再用归纳假设.

证明： 记

$$L(x) = \sum_{i,j} \sqrt{|x_i - x_j|}, \qquad R(x) = \sum_{i,j} \sqrt{|x_i + x_j|}.$$

对 n 归纳. 约定 $n = 0$ 时两边都是空和 0；$n = 1$ 时结论显然. 以下设 $n \geq 2$，并假设结论对较少变量成立.

共同平移所有变量不改变 L. 固定 $x_1, \ldots, x_n$，令

$$H(t) = R(x_1 + t, \ldots, x_n + t) = \sum_{i,j} \sqrt{|x_i + x_j + 2t|}.$$

只需证明 $\min_t H(t) \geq L(x)$.

H 的折点组成有限集合

$$\mathcal{B} = \left\{ -\frac{x_i + x_j}{2} : 1 \leq i, j \leq n \right\}.$$

在 $\mathbb{R} \setminus \mathcal{B}$ 的每个区间内，所有 $x_i + x_j + 2t$ 的符号固定，而 $t \mapsto \sqrt{|x_i + x_j + 2t|}$ 为凹函数，故 H 也为凹函数；两个相邻折点之间的最小值只能在端点取得. 在最左侧区间，H 随 t 向右递减；在最右侧区间，H 随 t 向右递增. 因此 H 的全局最小值在某个折点 t_0 取得.

令 $y_i = x_i + t_0$. 则 $L(y) = L(x)$、$R(y) = H(t_0)$，并存在 r, s 使 $y_r + y_s = 0$. 下面删去相应变量.

若 $r = s$，则 $y_r = 0$. 删去 y_r，其余 $n-1$ 个变量记为 z. 所有含指标 r 的项在左右两边相应各项之和都为 $2\sum_{k \neq r} \sqrt{|y_k|}$，故 $L(y) - L(z) = R(y) - R(z)$. 由归纳假设 $L(z) \leq R(z)$，得到 $L(y) \leq R(y)$.

若 $r \neq s$，写 $y_r = c$、$y_s = -c$，删去这两个变量，其余 $n-2$ 个变量记为 z. 左边所有含 r 或 s 的项之和为

$$D = 2\sqrt{2|c|} + 2 \sum_{k \neq r,s} \left(\sqrt{|y_k - c|} + \sqrt{|y_k + c|} \right).$$

右边中，$(r,r), (s,s)$ 给出 $2\sqrt{2|c|}$，$(r,s), (s,r)$ 为 0；对每个 $k \neq r, s$，四个混合项给出的仍是 $2\sqrt{|y_k - c|} + 2\sqrt{|y_k + c|}$. 因此 $L(y) - L(z) = R(y) - R(z) = D$. 再由归纳假设得到 $L(y) \leq R(y)$；当 $n = 2$ 时，z 为空组，正是约定的 $n = 0$ 情形.

于是

$$R(x) = H(0) \geq H(t_0) = R(y) \geq L(y) = L(x),$$

即

$$\sum_{i,j}\sqrt{|x_i-x_j|}\le\sum_{i,j}\sqrt{|x_i+x_j|}.$$

证毕.

前面的十九个例题分别使用了上述方法，下面把常用变形和取等条件作一番整理.

0.8 8 方法总结

0.8.1 8.1 三角不等式

基本形式是

$$\left|\sum_{i=1}^{m}u_i\right|\le\sum_{i=1}^{m}|u_i|.$$

若题目中有若干相近的线性式，可先尝试配对或分组，使合并后的式子只剩少数变量. 若出现许多形如 $|x_i-x_j|$ 的项，也可固定一个下标，先对一组距离求和，再整体使用三角不等式.

在数轴上，

$$|x-y|\le|x-t|+|t-y|$$

表示两点间的直线距离不超过经过 t 的两段距离之和. 适当选择 t，常能同时估计许多距离.

取等条件必须一并检查. 实数相加的三角不等式取等时，参与合并的非零项同号；上面的距离式取等时，t 位于 x,y 之间. 最佳常数和循环问题中，这些条件常直接决定等号结构.

0.8.2 8.2 零和条件

若 $\sum x_i=0$，正项之和记为 P，负项绝对值之和记为 Q，则

$$P=Q=\frac{1}{2}\sum|x_i|.$$

平方和、乘积、极差等问题都可分成正、负两组处理. 固定非负数总和后，平方和在总和集中于少数项时较大，乘积在各项相等时较大；极差则可由两组平均值估计.

使用组内不等式后，还要检查等号条件. 例如 $\sum u_i^2\le(\sum u_i)^2$ 取等时至多一个 u_i 非零；均值不等式取等时同组各项相等.

0.8.3 8.3 排序与两两距离

若有大量 $|x_i-x_j|$，可先设 $x_1\le\cdots\le x_n$. 此时

$$\sum_{i<j}|x_i-x_j|=\sum_{k=1}^{n}(2k-n-1)x_k=\sum_{k=1}^{n-1}k(n-k)(x_{k+1}-x_k).$$

第一式适合带区间约束或固定总和的题；第二式适合研究直径、相邻间隔和总距离之间的关系.

若条件本身也是距离和，可再引入前缀和 $S_k=x_1+\cdots+x_k$，把第 k 个条件写成线性方程，然后比较相邻两式.

两组变量分别排序后，还常用交换不等式：若 $a\le A$、$b\le B$，则

$$|a-b|+|A-B|\le|a-B|+|A-b|.$$

它表明一维距离中同序配对不会比交叉配对更差.

0.8.4 8.4 差分与递推

出现相邻差或二阶差分时，令 $d_i=a_{i+1}-a_i$. 跨度 a_j-a_i 变成一段连续 d_k 的和，二阶差分则变成 $d_{i+1}-d_i$. 若有 $|d_{i+1}-d_i|$ 的上界，可进一步得到 $|d_i-d_j|$ 的估计，再控制连续区段的和.

有些题的绝对值内部本身满足递推关系，这时可把内部量设为新变量，再逐步写回原变量. 要留意各步系数怎样变化，以及展开后是否有前后项相消或等比系数出现.

0.8.5 8.5 分段线性

绝对值函数在相邻折点之间是线性的. 对 $\sum|x-a_i|$，可先排序折点并计算各段斜率；含分母时，先确定 x 所在区间，使各项符号固定；含有最大值、最小值时，可使用

$$x_+=\frac{x+|x|}{2},\qquad x_-=\frac{x-|x|}{2}$$

或

$$\max\{u,v\}=\frac{u+v+|u-v|}{2}$$

改写成统一的代数式.

计算时记录折点、各区间的符号或斜率，并注意经过折点时哪一项改变符号.

0.8.6 8.6 循环结构

循环排列还要满足首尾相接. 若某个量沿圆周从 d 走到 $-d$，途中一定出现变号；若取等要求正负严格交错，则偶数个位置可以首尾相接，奇数个位置不能.

奇数循环中，若相邻三项单调，则

$$|x_i-x_{i+1}|+|x_{i+1}-x_{i+2}|=|x_i-x_{i+2}|.$$

删去中间项不会改变这两条边的总长度，因此常可把奇数情形化为偶数情形.

0.8.7 8.7 平移与折点

若表达式的一部分只含 $x_i - x_j$，共同平移 $x_i \mapsto x_i + t$ 不会改变这一部分. 把另一部分记为参数函数 $H(t)$，再研究它的折点、单调性或凹凸性.

若 H 在相邻折点之间为凹函数，最小值只能落在折点. 折点常对应某个变量为 0，或出现一对互为相反数的变量；删去这些特殊变量后，便可继续归纳.

0.9 9 提高练习

以下十题均为竞赛真题，其中前四题选自国内竞赛. 建议先独立完成，再查阅后面的提示.

1. **2009 年 CMO 第 4 题**给定整数 $n \geq 3$，实数 $a_1, \ldots, a_n$ 满足

$$\min_{i<j} |a_i - a_j| = 1.$$

   求 $\sum_{k=1}^{n} |a_k|^3$ 的最小值.

2. **2010 年全国高中数学联赛一试第 9 题**已知 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$，且 $0 \leq x \leq 1$ 时 $|f'(x)| \leq 1$. 求 a 的最大值.

3. **2023 年中国女子数学奥林匹克第 8 题**对平面两点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 定义 $d(A, B) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$. 设 $P_1, \ldots, P_{2023}$ 两两不同，记

$$\lambda = \frac{\max_{i<j} d(P_i, P_j)}{\min_{i<j} d(P_i, P_j)}.$$

   证明 $\lambda \geq 44$，并构造 $\lambda = 44$ 的一组点.

4. **2019 年中国西部数学邀请赛第 4 题**给定 $n \geq 2$. 求最小实数 λ，使任意 $x_1, \ldots, x_n \in [0, 1]$ 都可选 $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{0, 1\}$，满足任意 $1 \leq i \leq j \leq n$ 都有

$$\left| \sum_{k=i}^{j} (\varepsilon_k - x_k) \right| \leq \lambda.$$

5. **2016 年 IMO 预选题 A2** 设 $a_1, \ldots, a_5$ 为正实数. 求最小实数 C，使总能选出互不相同的 i, j, k, l，满足

$$\left| \frac{a_i}{a_j} - \frac{a_k}{a_l} \right| \leq C.$$

6. **2003 年 IMO 第 5 题**设 $x_1 \le \cdots \le x_n$. 证明

$$\left(\sum_{i,j} |x_i - x_j|\right)^2 \le \frac{2(n^2-1)}{3} \sum_{i,j} (x_i - x_j)^2,$$

并确定等号情形.

7. **2007 年 IMO 预选题 A1** 给定实数 $a_1, \ldots, a_n$，令

$$d_i = \max_{j \le i} a_j - \min_{j \ge i} a_j, \qquad d = \max_i d_i.$$

证明

$$\min_{x_1 \le \cdots \le x_n} \max_i |x_i - a_i| = \frac{d}{2}.$$

8. **1997 年 IMO 第 3 题**实数 $x_1, \ldots, x_n$ 满足 $|x_1 + \cdots + x_n| = 1$、$|x_i| \le (n+1)/2$. 证明存在一个排列 $y_1, \ldots, y_n$，使

$$|y_1 + 2y_2 + \cdots + ny_n| \le \frac{n+1}{2}.$$

9. **2015 年 IMO 预选题 C5** 正整数序列 $a_i \le 2015$，且 $i \ne j$ 时 $i + a_i \ne j + a_j$. 证明存在正整数 b, N，使任意 $n > m \ge N$ 都有

$$\left|\sum_{i=m+1}^{n} (a_i - b)\right| \le 1007^2.$$

10. **2016 年 IMO 预选题 A3** 求所有 $n \ge 3$，使得：任给实数 a_k, b_k 满足 $|a_k| + |b_k| = 1$，总能取 $x_k \in \{-1, 1\}$，使

$$\left|\sum x_k a_k\right| + \left|\sum x_k b_k\right| \le 1.$$

0.10 10 提高练习提示

1. 排序为 $a_1 < \cdots < a_n$，则相邻差都不小于 1. 先说明极小情形中相邻差应全部等于 1；于是只剩下把一串连续整数整体平移，使 $\sum |a_k|^3$ 最小. 奇偶两种情形分别以 0 或 $\pm\frac{1}{2}$ 为中心.

2. 只取三个点的导数值：

$$3a = 2f'(0) + 2f'(1) - 4f'\left(\frac{1}{2}\right).$$

先用 $|f'| \le 1$ 得上界，再检查 $f'(x) = 8x^2 - 8x + 1$ 能否取到这个界.

3. 作线性变换 $u=x+y$，$v=x-y$，则

$$|x_1-x_2|+|y_1-y_2|=\max\{|u_1-u_2|,|v_1-v_2|\}.$$

把最小距离归一化为 1．若最大距离小于 44，所有点落在边长小于 44 的正方形中；分成 44×44 个小方格即可计数．等号构造从 45×45 的整数格点中取点.

4. 令 $S_j=x_1+\cdots+x_j$、$T_j=\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_j$，则区间误差等于 $(T_j-S_j)-(T_{i-1}-S_{i-1})$．考察 $S_0,S_1,\ldots,S_n$ 的小数部分在单位圆周上的位置，取最大空隙作切口；令 $T_j=\lfloor S_j+\theta\rfloor$．下界可取 $x_i=1/(n+1)$.

5. 将 $a_1,\ldots,a_5$ 排序，考察

$$\frac{a_1}{a_2},\quad \frac{a_3}{a_4},\quad \frac{a_1}{a_5},\quad \frac{a_2}{a_3},\quad \frac{a_4}{a_5}.$$

它们都在 $(0,1]$ 内．把区间分成两个等长部分，并注意适当两项所用的四个下标互不相同.

6. 排序后

$$\sum_{i,j}|x_i-x_j|=2\sum_{k=1}^{n}(2k-n-1)x_k.$$

令各 x_k 减去平均数，再对 $2k-n-1$ 与新的 x_k 使用柯西不等式．等号要求 x_k 关于 k 为线性函数.

7. 取 $p\le q\le r$，使 $a_p=\max_{j\le q}a_j$、$a_r=\min_{j\ge q}a_j$ 且 $a_p-a_r=d$．由 $x_p\le x_r$ 得下界．构造可试

$$x_i=\max_{j\le i}\left(a_j-\frac{d}{2}\right).$$

8. 对排列 $\pi=(y_1,\ldots,y_n)$ 记 $S(\pi)=y_1+2y_2+\cdots+ny_n$．交换相邻两项时，$S$ 的改变量绝对值不超过 $n+1$．比较一个排列与其逆序排列，并使用

$$S(\pi)+S(\pi^{\mathrm{rev}})=(n+1)\sum x_i.$$

9. 画有向边 $i\to i+a_i$．每个正整数至多有一条入边，每条边长度不超过 2015．把没有入边的点作为有向链的起点，先控制链的条数，再比较每条链跨过区间 $(m,n]$ 时的两个相邻点.

10. 先用构造排除偶数 n．对奇数 n，可同时改变 (a_k,b_k) 的符号使 $b_k\ge 0$，再按 a_k 递减排列，取 $x_k=(-1)^{k+1}$，分别整理 $a_k\ge 0$ 与 $a_k<0$ 两段的交错和.