数学竞赛每日一练第 9 期解答

2021-06-12 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_2754c6b21b836752

数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1=\dfrac{7}{2}$，$x_{n+1}=x_n(x_n-2)$. 设 $x_{2021}=\dfrac{a}{b}$，其中 $a,b\in\mathbb{N}$ 且互素. 求证：若 p 为 a 的一个素因子，则 $3\mid p-1$ 或 $p=3$.

解答（PDF 中已展开）

证明先求 $\{x_n\}$ 的通项公式.

由 $x_{n+1}=x_n(x_n-2)$ 知

$$x_{n+1}-1=(x_n-1)^2-2$$

即

$$\frac{x_{n+1}-1}{2}=2\left(\frac{x_n-1}{2}\right)^2-1$$

设 $y_n=\dfrac{x_n-1}{2}$ 即 $x_n=2y_n+1$，则有

$$y_{n+1}=2y_n^2-1$$

考虑到 $y_1=\dfrac{x_1-1}{2}=\dfrac{5}{4}>1$，设

$$y_n=\cosh z_n=\frac{e^{z_n}+e^{-z_n}}{2},z_n>0$$

于是有

$$\cosh z_{n+1}=2\cosh^2 z_n-1=\cosh 2z_n$$

即 $z_{n+1}=2z_n$，且 $z_1=arcosh\dfrac{5}{4}=\ln 2$. 因此

$$z_n=2^{n-1}\ln 2$$

$$y_n=\cosh z_n=\frac{2^{2^{n-1}}+2^{-2^{n-1}}}{2}$$

$$x_n=2y_n+1=2^{2^{n-1}}+2^{-2^{n-1}}+1$$

因此 $\{x_n\}$ 的所有项均是分母为 2 的幂的最简分数，即 $2\nmid a$，因此 $p\neq 2$.

注意到

$$x_{2021}=\frac{\left(2^{2020}\right)^2+2^{2020}+1}{2^{2020}}$$

即 $p \mid x^2+x+1$，其中 $x=2^{2020}$.

于是只需证明：对任意正整数 x，x^2+x+1 的素因子 p，要么有 $p=3$，要么有 $p \equiv 1(\mathrm{mod}\ 3)$.

由 $p \mid x^2+x+1$ 知 $p \mid x^3-1$.

因此 x 模 p 的阶为 1 或 3.

若 x 模 p 的阶为 1，即 $p \mid x-1$，又

$$p \mid x^2+x+1=(x-1)(x+2)+3$$

于是 $p \mid 3$，即 $p=3$.

若 x 模 p 的阶为 3，由 Fermat 小定理 $x^{p-1} \equiv 1(\mathrm{mod}\ p)$，因此 $3 \mid p-1$，即 $p \equiv 1(\mathrm{mod}\ 3)$.

证毕.