加权均值视角下的三行证明——2025 年高联二试不等式

2026-08-17 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_2789b6811fcad89e

题目：

设 m,n,k 都是正整数，$m\geq 2$，且 $n\geq k\geq 2$，实数 $x_1\geq x_2\geq\cdots\geq x_n\geq 0$，满足以下两个条件：

$(1)x_1^m+x_2^m+\cdots+x_n^m\geq 1$；

$(2)x_1+x_2+\cdots+x_n\leq k$.

求证：$x_1+x_2+\cdots+x_k\geq 1$.

解答（PDF 中已展开）

证明：

若 $x_1>1$，结论直接成立．下面只看

$0\leq x_1\leq x_2\cdots\leq x_1\leq 1$

的情形.

考虑权重 $\lambda_i=x_i^{m-1}\leq x_i\leq 1$，有

$\sum_{i=1}^n\lambda_i\leq\sum_{i=1}^n x_i\leq k$

于是

$\sum_{i=1}^k x_i\geq\sum_{i=1}^n\lambda_i x_i=\sum_{i=1}^n x_i^m\geq 1$.

证毕.

注：

$\sum\limits_{i=1}^{k}x_i\geq\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i x_i$ 的意义是：

> 总权重不超过 k，单个权重不超过 1 的变量之和，不超过集中在前 k 大的数进行求和（权重均为 1).