一道组合恒等式的双射证法：2000 年 CTST 第 2 题

2026-08-21　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_28570311969888d3

题目

给定正整数 k,m,n，满足 $1\le k\le m\le n$. 求

$\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\frac{1}{n+k+i}\cdot\frac{(m+n+i)!}{i!(n-i)!(m+i)!}$

的值.

解答（PDF 中已展开）

解答

补上 $i=0$ 项并乘 $n!$，得到

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}\frac{(m+n+i)!}{(m+i)!(n+k+i)}. \tag{1}$$

我们先用双射证明补项后的结果为 0.

赋予组合意义

竞赛班有 n 名学生，第 j 名学生手上有 $m+j$ 道互不相同的个人题，其中 $j=1,2,\cdots,n$. 教练手上另外还有 n 道互不相同的公共题（与个人题也不同）.

今天，手上有 $n+k$ 道个人题的学生（编号为 $n+k-m\in[1,n]\cap\mathbb{Z}$）没有来.

现在固定 i.

教练先从 n 道公共题中选出 i 道供学生选择，共有 $\binom{n}{i}$ 种选法.

对于第 j 名到场学生，他可以从自己的个人题与教练选出的 i 道公共题中任选一道，因此共有 $m+j+i$ 种选择. 故总方案数为

$$\begin{aligned}&\binom{n}{i}\frac{(m+1+i)(m+2+i)\cdots(m+n+i)}{n+k+i}\\=&\binom{n}{i}\frac{(m+n+i)!}{(m+i)!(n+k+i)}\end{aligned}$$

故这恰好就是 (1) 中第 i 项的绝对值.

构造双射

下面构造双射，将 i 为偶数的方案与 i 为奇数的方案一一对应.

今天只有 $n-1$ 名学生到场，而一共有 n 道公共题. 每名学生最终只选择一道题，因此至少有一道公共题没有被任何学生选中.

对于任意一个方案，在所有没有被学生选中的公共题中，取编号最小的一道，记为 q.

对这个方案作如下变换：

- 如果 q 原本被教练选出，就将它从教练选出的公共题中删去；
- 如果 q 原本没有被教练选出，就将它加入教练选出的公共题中；
- 所有学生原先选择的题保持不变.

因为 q 本来就没有被任何学生选择，所以无论将它加入还是删去，都不会影响任何学生原有的选择，因此变换后的方案仍然合法.

此外，这个变换前后，被学生实际选中的公共题完全没有改变. 因此，编号最小的 “没有被学生选中的公共题” 仍然是 q 于是再进行一次同样的变换，就会回到原方案.

所以这个变换是一个双射，并且它恰好使教练选出的公共题数增加 1 或减少 1. 因此，它把 i 为偶数的方案与 i 为奇数的方案一一对应。

于是，(1) 中每一个正号方案都与唯一一个负号方案配对，两者恰好抵消. 因此

$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}\frac{(m+n+i)!}{(m+i)!(n+k+i)}=0.$

从而

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\frac{1}{n+k+i}\cdot\frac{(m+n+i)!}{i!(n-i)!(m+i)!}\\=&-(-1)^0\frac{1}{n+k+0}\cdot\frac{(m+n+0)!}{0!(n-0)!(m+0)!}\\=&\boxed{-\frac{1}{n+k}\binom{m+n}{n}}.\end{aligned}$$