MOP 2026 家庭作业问题

2026-05-28 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_28730d1520eaaca3

题 1. 设 P 是整系数多项式，满足对任意正整数 n，都有 $n \mid P(2^n)$. 证明 P 是零多项式.

题 2. 称正整数 n 是好的，如果存在 $1, 2, \ldots, n$ 的一个排列 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，使得对每个 $1 \le k \le n$，$k + a_k$ 都是完全平方数. 求集合 $\{11, 13, 15, 17, 19\}$ 中的所有好数.

题 3. 设正整数 $a_1, a_2, \ldots, a_{2006}$（其中某些可以相等）满足如下条件：分数

$$\frac{a_1}{a_2}, \frac{a_2}{a_3}, \ldots, \frac{a_{2005}}{a_{2006}}$$

中任意两个都不相等. 则 $a_1, a_2, \ldots, a_{2006}$ 中至少有多少个不同的数?

题 4. 在三角形 BCF 中，$\angle B$ 为直角. 设 A 是直线 CF 上的点，满足 $FA = FB$ 且 F 在 A 与 C 之间. 取点 D 使得 $DA = DC$ 且 AC 平分 $\angle DAB$. 取点 E 使得 $EA = ED$ 且 AD 平分 $\angle EAC$. 设 M 是 CF 的中点. 取点 X 使得 $AMXE$ 是平行四边形. 证明 BD、FX 和 ME 三线共点.

题 5. 设 $\varphi(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 是实系数多项式. 已知 $\varphi(x)$ 有三个正实根且 $\varphi(0) < 0$，证明

$$2b^3 + 9a^2d - 7abc \le 0.$$

题 6. 设 ABC 是不等边三角形，垂心为 H，外心为 O. 记 M、N 分别为 AH、BC 的中点. 设以 AH 为直径的圆 γ 与三角形 ABC 的外接圆交于异于 A 的点 G，与直线 AN 交于异于 A 的点 Q. 圆 γ 在 G 处的切线与直线 OM 交于点 P. 证明三角形 GNQ 与三角形 MBC 的外接圆交于 PN 上的一点 T.

题 7. 求下面方程的所有素数解：

$$x^y - y^x = xy^2 - 19$$

题 8. 在 $AB \ne AC$ 的三角形 ABC 中，设其内切圆分别与边 BC、CA、AB 相切于 D、E、F. $\angle BAC$ 的内角平分线分别与直线 DE、DF 交于 X、Y. 设 S、T 是边 BC 上两个不同的点，满足

$$\angle XSY = \angle XTY = 90^\circ.$$

设 γ 是三角形 AST 的外接圆. 证明 γ 与三角形 ABC 的外接圆和内切圆都相切.

题 9. 设 M 是平面上由 n 个点组成的集合，满足如下两个条件：

(1)M 中存在七个点构成一个凸七边形的顶点；

(2) 只要 M 中的五个点构成一个凸五边形的顶点，就存在 M 中的一个点在该五边形的内部.

求 n 的最小可能值.

题 10. 假设每个正整数都被染成红色或蓝色. 证明存在一个严格递增的无穷正整数序列

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$$

使得

$$a_1,\ \frac{a_1+a_2}{2},\ a_2,\ \frac{a_2+a_3}{2},\ a_3, \ldots$$

是一个所有项颜色都相同的无穷正整数序列.

题 11. 对正整数的有限集 X，定义

$\Sigma(X)=\sum_{x\in X}\arctan\frac{1}{x}$.

给定正整数的有限集 S 满足 $\Sigma(S)<\frac{\pi}{2}$，证明存在正整数的有限集 T，使得

$S\subseteq T$ 且 $\Sigma(T)=\frac{\pi}{2}$.

题 12. 设三角形 ABC 的内切圆 (I) 与 BC 相切于 D. 直线 ID 与 (I) 再次交于 K，设 ℓ 是 (I) 在 K 处的切线. 取点 $E,F\in\ell$ 使得 $\angle EIF=90^\circ$. 设 EI、FI 分别与三角形 AEF 的外接圆交于异于 E 的点 E' 和异于 F 的点 F'. 证明三角形 ABC 的外心 O 在直线 $E'F'$ 上.

附加题 1. 设 $s_1,s_2,\ldots,s_n$ 是独立随机变量，取值于集合 Ω，令

$S=\{s_1,s_2,\ldots,s_n\}$

为得到的 Ω 的随机子集. 设 $I,J\subseteq\Omega$ 是不相交的集合. 证明

$\Pr(I\cup J\subseteq S)\le\Pr(I\subseteq S)\Pr(J\subseteq S)$.

附加题 2. 设 $ABCDEFG$ 是中心为 O 的正七边形. 设 $\mathcal{H}$ 是经过 A,B,C,E,O 五点的双曲线. 求 $\mathcal{H}$ 的两条渐近线之间的锐角.