2023 年温州摇篮杯压轴不等式解答

2023-09-18　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_28c46a2c21616c4c

{\LARGE\bfseries 2023 年温州摇篮杯压轴不等式解答}

{\small 2023-09-18}　　{\small 原文链接}

上午有老师问了一道不等式，是今年温州摇篮杯的最后一题，但一般形式更早是在 2006 年伊朗 TST 中出现的这里写个解答.

题目：

设实数 $x_1\le x_2\le\cdots\le x_5$，\[f(x)=| x+x_1|+| x+x_2|+| x+x_3|+| x+x_4|+| x+x_5|. \] (1) 若 $f(x)$ 的最小值为 1，求 x_5-x_1 的最小值；

(2) 若 $f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)+f(x_5)\ge mf(0)$ 恒成立，求整数 m 的最大值.

主要看第二问，要求使得不等式恒成立的 m 的最大值，考虑最坏情况：左边尽可能小，右边尽可能大.

于是构造能够正负抵消的 x_1 到 x_5，注意到 5 是奇数，无法对称地构造正负，我们取 \[(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(-1,-1,1,1,1) \] 得到左边为 26，右边为 $5m$，于是 $m\le \frac{26}{5}$，最大整数值为 5.

我们直接证明一般情况的不等式：

给定正整数 n，设 $x_1\le x_2\le \cdots\le x_n$，求证：\[\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n| x_i+x_j|\ge n\sum_{i=1}^n| x_i|. \] 对这样的绝对值不等式，我们常用正负分离的方法，结合绝对值的三角不等式进行处理.

解答（PDF 中已展开）

证明：

若所有的 x_i 同号，不等式显然成立.

设 $x_1\le \cdots\le x_k< 0\le x_{k+1}\le \cdots\le x_n$，不妨设 $k\le\frac{n}{2}$（否则可以将每个 x_i 均加上负号）.

于是对于同号的 x_i 和 x_j，有 $| x_i+x_j|=| x_i|+| x_j|$. 不等式的左边 \[

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n| x_i+x_j| \\&= \sum_{i=1}^k\sum_{j=1}^k| x_i+x_j|+\sum_{i=k+1}^n\sum_{j=k+1}^n| x_i+x_j|+2\sum_{i=1}^k\sum_{j=k+1}^n| x_i+x_j| \\&= \sum_{i=1}^k\sum_{j=1}^k(| x_i|+| x_j|)+\sum_{i=k+1}^n\sum_{j=k+1}^n(| x_i|+| x_j|)+2\sum_{i=1}^k\sum_{j=k+1}^n| x_i+x_j| \\&= 2k\sum_{i=1}^k| x_i|+2(n-k)\sum_{j=k+1}^n| x_j|+2\sum_{i=1}^k\sum_{j=k+1}^n| x_i+x_j|\end{aligned}$$

\] 故只需证：\[(n-2k)\sum_{j=k+1}^n| x_j|+2\sum_{i=1}^k\sum_{j=k+1}^n| x_i+x_j|\ge (n-2k)\sum_{i=1}^k| x_i| \] 由绝对值不等式，对任意 $1\le i\le k$ 和 $k+1\le j\le n$，都有 \[| x_j|+| x_i+x_j|\ge | x_i| \] 记 $A=\sum_{i=1}^{k}| x_i|$，$B=\sum_{j=k+1}^{n}|

x_j|$，$S=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=k+1}^{n}| x_i+x_j|$。对上式求和得 $(n-k)A\le kB+S$。两边乘以 $\frac{n-2k}{n-k}$，由 $0\le k\le n/2$ 得 \[(n-2k)A\le\frac{k(n-2k)}{n-k}B+\frac{n-2k}{n-k}S\le(n-2k)B+2S. \] 即得所需不等式。

由上可以看出，除所有 $x_i=0$ 外，等号成立条件是每个 x_i 的绝对值相等，且正数与负数的个数相同（要求 n 为偶数）.