# 加拿大 CRUX 杂志问题 4771-4780

2022-10-22 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_2a17afe1a628346f

1. 设 $I$ 为一个包含 0 和 1 的开区间，$f\colon I\to\mathbb{R}$ 为为可微的严格递增的下凸函数. 若 $f'(1)<2f(1)$，求证：存在正实数 $a$，$b$，使得 $n\to\infty$ 时，

$$\int_0^1 (f(x))^{2n+1}\mathrm{d}x\sim a\cdot\frac{b^n}{n}$$

并将 $a$ 和 $b$ 写为关于 $f(1)$、$f'(1)$ 的函数.

2. 求所有函数 $f\colon(0,+\infty)\to(0,+\infty)$，使得对任意 $x$，$y\in(0,+\infty)$，都有

$$f(kx+f(y))=\frac{y}{k}\cdot f(xy+1)$$

其中 $k>0$ 为给定的实参数.

3. $n\geq 3$, $x_1$, $x_2$, $\cdots$, $x_n$ 为非负实数, 且 $x_1+x_2+\cdots+x_n=2$, $x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_{n-1}x_n=1$. 求证：至多有 3 个 $x_i$ 不等于 0，且至少有 1 个 $x_i$ 等于 1.

4. 设 $\triangle ABC$ 的内切圆半径为 $r$. $D$、$E$、$F$ 分别在边 $BC$、$CA$、$AB$ 上，且 $AD$、$BE$、$CF$ 分别为 $\triangle ABC$ 三个内角的角平分线. 求证：

$$FE^2+ED^2+DF^2\geq 9r^2.$$

5. 正实数 $A$ 和 $B$ 满足 $A<B$，$A+B<\pi$，设定义在 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 上的函数

$$f(x)=\sin(\pi A)\sin(A+xB)-\sin(xB)\sin(B+xA).$$

求证：$y=f(x)$ 的图像与 $x$ 轴没有交点.

6. 对任意正整数 $n$，求值：

$$\left\lfloor\frac{1}{\left\{\sqrt{n^2+3n+4}\right\}}\right\rfloor.$$

其中 $[a]$ 和 $\{a\}$ 分别表示 $a$ 的整数部分和小数部分.

1. 设 $n\in\mathbb{N}$，$x_1$，$x_2$，$\cdots$，$x_n\geq 1$ 满足 $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{x_i}=1$. 求证：

$$\frac{n}{\frac{1}{2}+n^2}<\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\frac{1}{2}+x_i^2}<\frac{2}{3}.$$

2. 设 $f(x)=2^{x^2}$. 求证：对任意 $n\in\mathbb{N}\backslash\{1\}$，存在 $a$，$b\in\mathbb{N}\backslash\{1\}$，使得：
   (1)$\gcd(a,b)=1$;
   (2)$n\mid\varphi(a)$ 且 $n\mid\varphi(b)$;
   (3)$a$，$b\leq f(n)$.
   其中 $\varphi(n)$ 为欧拉函数，表示不大于 $n$ 且和 $n$ 互素的正整数的个数.

3. 设 $0<a<b$，函数 $f$：$[a,b]\to\mathbb{R}$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $(a,b)$ 上可导，且 $f(a)=f(b)$. 求证：存在相异实数 $c_1$，$c_2\in(a,b)$，使得

$$\sqrt{b}f'(c_1)+\sqrt{a}f'(c_2)=0.$$

4. 设 $0<a<$，$m=\dfrac{a+b}{2}$，$f$：$[a,b]\to\mathbb{R}$ 在 $[a,b]$ 上可导，且导数连续，$f(m)=0$. 求证：

$$2a^3\int_{-a}^{a}(f'(x))^2\mathrm{d}x\geq 3\left(\int_{-a}^{2}f(x)\mathrm{d}x\right)^2.$$