2026 年 ELMO

2026-06-27　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_2a5e7601a90da0e2

第一天

考试时间：2026 年 6 月 13 日美国东部时间 12:30–17:00

考试时长：4 小时 30 分钟

每题分值：7 分

题 1. 设 P_1, P_2, P_3 是圆 Ω 上三个互不相同的点．对所有满足 $1 \le i \le 23$ 的正整数 i，定义点 P_{i+3} 为点 P_i 关于直线 $P_{i+1}P_{i+2}$ 的对称点．求证：直线 $P_{20}P_{26}$ 与圆 Ω 相切．

题 2. 定义 n **阶拉丁方阵**：一个 $n \times n$ 方格表，每个格子填入 1 到 n 中的一个正整数，使得每行、每列都恰好包含 1 到 n 各一次．

称四个数构成的四元组是**稳定的**：若这四个数中恰好有 2 个或恰好有 4 个互不相同的数值．

求所有正整数 n，使得存在一个 n 阶拉丁方阵，满足：任意四个不同格子构成网格矩形的四个角时，这四个格子内的数字都构成稳定四元组．

题 3. 求所有整数 $n \ge 2$，使得存在整系数多项式 $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$，其次数不超过 $0.9n$，且满足：P 在模 n 下的值域与 P 在模 n 下的零点集合完全相等．

补充定义：
(1) P 模 n 的**值域**：所有满足 $0 \le y \le n-1$，且存在正整数 x 使得 $n \mid P(x) - y$ 的整数 y 构成的集合；
(2)P 模 n 的**零点集**：所有满足 $0 \le x \le n-1$，且 $n \mid P(x)$ 的整数 x 构成的集合．

第二天

考试时间：2026 年 6 月 18 日美国东部时间 12:00–16:30

考试时长：4 小时 30 分钟

每题分值：7 分

题 4. 对整数 n，记 $\tau(n)$ 为 n 的正约数个数．对每个正整数 k，定义集合

$$S_k = \{\tau(k), \tau(2k), \tau(3k), \cdots\}.$$

若两个正整数 a, b 满足 $S_a = S_b$，求证：对任意正整数 $n \ge 1$，均有 $\tau(a^n) = \tau(b^n)$．

注：两个集合相等，当且仅当一个集合中的每个元素都属于另一个集合．

题 5. 记 $\mathbb{N}$ 为全体正整数构成的集合．求所有函数 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，使得对任意正整数 m, n，均满足 $f(f(n)^m) = 2^{f(m)n}$．

题 6. 给定正整数 n. 在一个圆周上选取 $n(n+1)$ 个点，将每个点染为 n 种颜色之一，且每种颜色恰好出现 $n+1$ 次.

埃尔莫希望选出 n 条互不重叠的圆弧，满足：

(1) 每条圆弧的两个端点均为所选点，且两点同色；

(2) 这 n 条圆弧各自对应的颜色互不相同.

求证：埃尔莫至少有 $n+1$ 种不同的选取方案.