几道与圆幂有关的问题

2022-10-28　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_2aa0674bb2a55eba

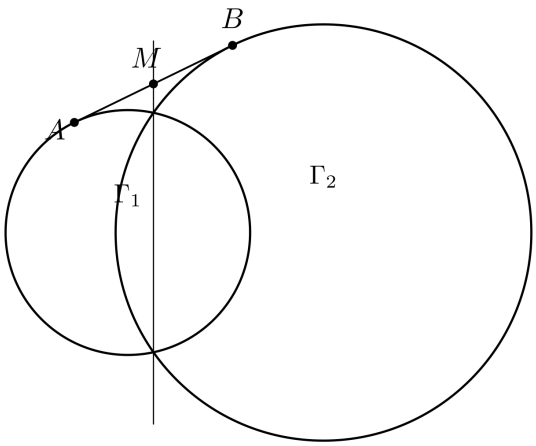
总有人说，我公众号上平面几何内容太少了，想看到一些几何有关的文章。

其实，一直没怎么发几何的原因主要有两个：一个是几何水平确实不高，另一个是太懒了，不想每次都用 tikz 画图，又不喜欢用几何画板。

不过最近后台不少读者留言说到，所以今天开始会陆续更新一些几何的文章。

因为水平有限，所写内容一般比较基础，适合初学者，也欢迎各位高手批评与指正。

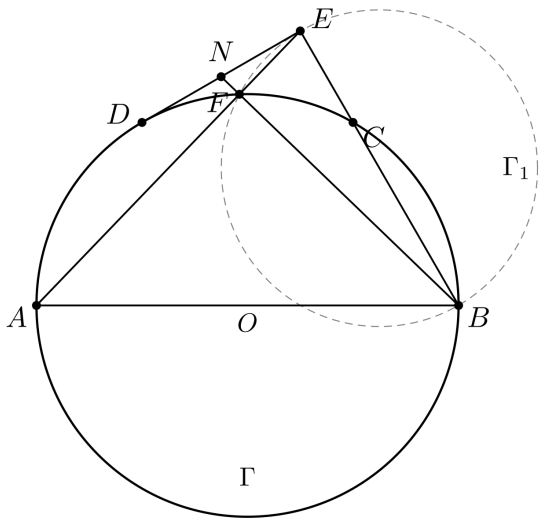
1. Γ_1 和 Γ_2 为相交两圆，它们的一条公切线和 Γ_1 切于点 A，和 Γ_2 切于点 B. 求证：Γ_1 和 Γ_2 的公共弦所在直线平分线段 AB.



证明：

设公共弦所在直线与 AB 交于点 M，则 M 在 Γ_1 和 Γ_2 的根轴上，于是 M 对两圆的幂相等，即 $MA^2 = MB^2$，也即 $MA = MB$.

1. 设 C 为以线段 AB 为直径的半圆上一点，D 为弧 AC 的中点. 过点 D 作 BC 的垂线交 BC 延长线于点 E，线段 AE 和半圆交于点 F. 求证：BF 平分线段 DE.



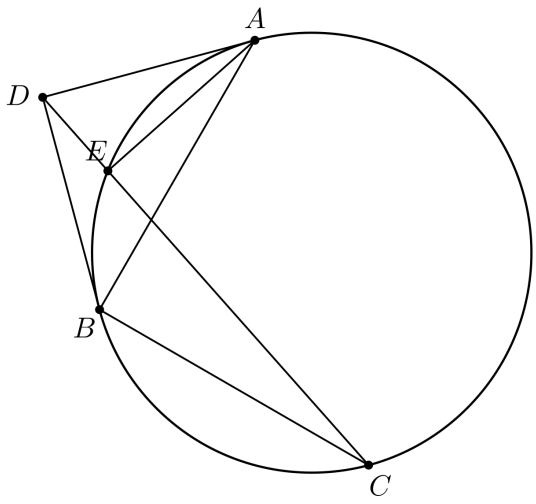
证明：

记以 AB 为直径的圆为 Γ，以 BE 为直径的圆为 Γ_1. 由 $\angle AFB = 90^\circ$ 知 Γ_1 过点 F.

由 $\angle DEB = 90^\circ$ 知 DE 和 Γ_1 相切. 于是 DE 为 Γ 和 Γ_1 的公切线，而 BF 为 Γ 和 Γ_1 的公共弦.

由第 1 题知：BF 平分线段 DE.

1. 设 A，B，C 为圆 Γ 上三点，且 $AB = BC$. 过点 A 和点 B 的切线交于点 D. DC 和 Γ 再次交于点 E. 求证：AE 平分线段 BD.



证明：

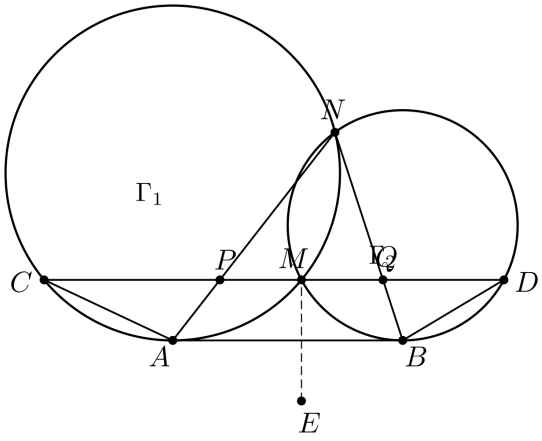
设 $\triangle ADE$ 的外接圆为 Γ_1. 由第 1 题：只需证 DB 和 Γ_1 相切.

事实上：

$\angle ADB = 180^\circ - 2\angle ABD = \angle ABC = \angle AEC$

由弦切角定理的逆定理即证.

1. **(2000 年 IMO)** 圆 Γ_1，Γ_2 交于 M，N 两点. 两圆的一条外公切线 l 分别与 Γ_1，Γ_2 切于点 A，B. 过 M 且与 l 平行的直线分别与 Γ_1，Γ_2 交于不同于 M 的点 C，D. 设直线 CA 与 DB 交于点 E，直线 AN 与 CD 交于点 P，直线 BN 与 CD 交于点 Q. 求证：$EP = EQ$.



证明：

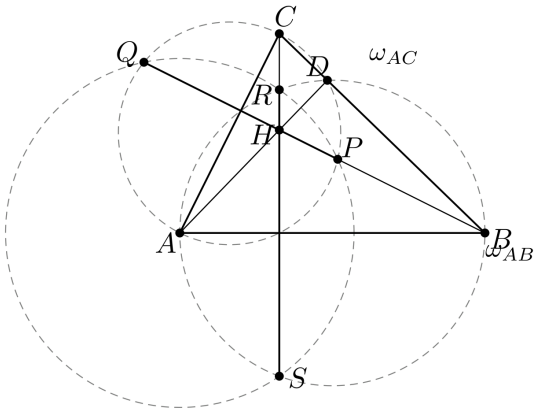
设 NM 交 AB 于点 X. 由第 1 题知：X 为 AB 的中点.

因为 PQ 平行于 AB，由线束定理，M 为 PQ 中点.

由于 $\angle MAB = \angle MCE = \angle BAE$，$\angle MBA = \angle MDE = \angle ABE$，于是 E 和 M 关于 AB 对称.

故 $EM \perp PQ$，结合 M 为 PQ 中点知：$EP = EQ$.

1. $\triangle ABC$ 为锐角三角形. 过 B 作 AC 的垂线，和以 AC 为直径的圆交于 P，Q 两点；过 C 作 AB 的垂线，和以 AB 为直径的圆交于 R，S 两点. 求证：P，Q，R，S 四点共圆.



证明：

设 D 为 A 在 BC 上的射影，H 为 $\triangle ABC$ 的垂心.

由 $\angle ADB = 90^\circ$ 知，点 D 在以 AB 为直径的圆上. 由圆幂定理：

$$HS \cdot HR = HA \cdot HD$$

同理

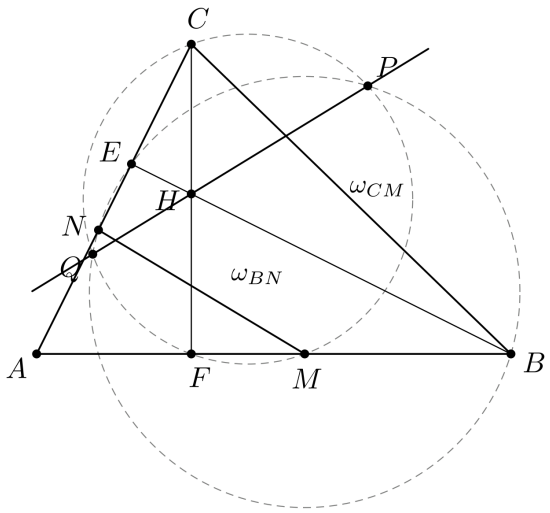
$$HP \cdot HQ = HA \cdot HD$$

于是

$$HS \cdot HR = HP \cdot HQ$$

即 P，Q，R，S 四点共圆.

1. 锐角 $\triangle ABC$ 的垂心为 H. 在边 AB、AC 上分别取点 M、N. 设以 BN 为直径的圆和以 CM 为直径的圆交于 P、Q 两点. 求证：P，Q，H 三点共线.



证明：

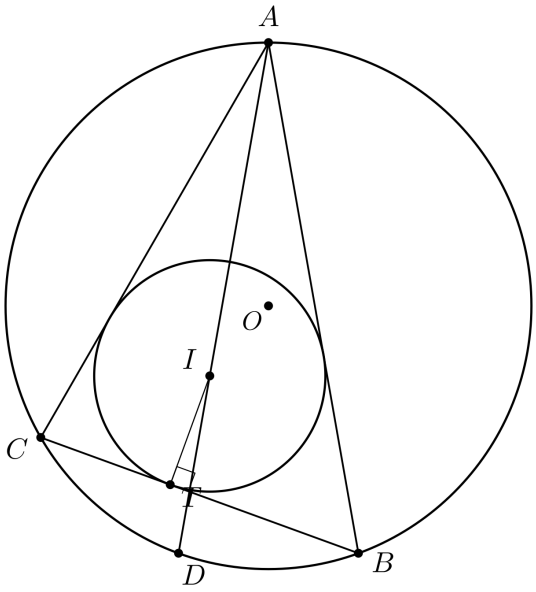
只需证 H 在两圆的根轴上，即证明 H 对两圆的幂相等.

设 BE、CF 为 $\triangle ABC$ 的两条高. 由 $\angle BEN = 90^\circ$ 知点 E 在以 BN 为直径的圆上. 于是点 H 对以 BN 为直径的圆的幂为 $HB \cdot HE$.

同理点 H 对以 CM 为直径的圆的幂为 $HC \cdot HF$.

由 $\angle BEC = \angle BFC = 90^\circ$ 知 B，C，E，F 四点共圆，于是 $HB \cdot HE = HC \cdot HF$. 证毕.

1. **(欧拉定理)** 设 $\triangle ABC$ 的外心为 O，内心为 I 外接圆半径为 R，内切圆半径为 r. 求证：$OI^2 = R(R - 2r)$.



证明：

延长 AI 交 $\triangle ABC$ 的外接圆于点 D. 于是点 I 对 $\odot O$ 的幂为

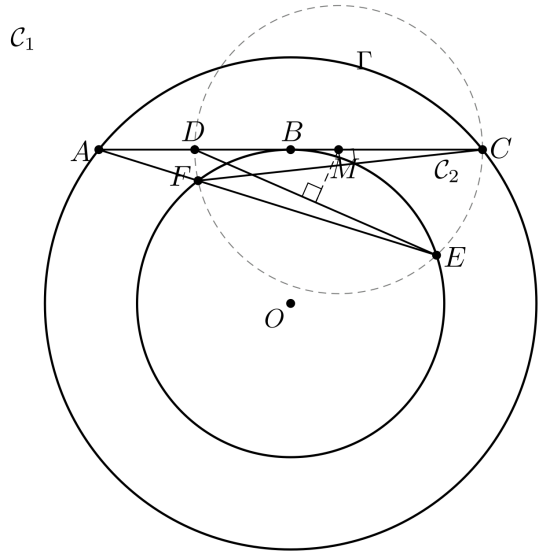
$$-IA \cdot ID = IO^2 - R^2$$

$IA = \dfrac{r}{\sin\frac{A}{2}}$，由鸡爪定理：$ID = BD = 2R\sin\dfrac{A}{2}$. 于是

$$R^2 - IO^2 = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}} \cdot 2R\sin\frac{A}{2} = 2Rr$$

证毕.

1. **(1998 年 USAMO)** $\mathcal{C}_1$ 和 $\mathcal{C}_2$ 为同心圆，$\mathcal{C}_2$ 在 $\mathcal{C}_1$ 内部. 设 A 为 $\mathcal{C}_1$ 上一点，B 为 $\mathcal{C}_2$ 上一点，且 AB 和 $\mathcal{C}_2$ 相切. 延长 AB 交 $\mathcal{C}_1$ 于点 C，D 为 AB 的中点. 过 A 作直线和 $\mathcal{C}_2$ 交于 E，F 两点，使得 DE 的中垂线和 CF 的中垂线交于直线 AB 上一点 M. 求 $\dfrac{AM}{MC}$ 的值.



解答：

易知 B 为 AC 中点.

由圆幂定理：$AE \cdot AF = AB^2 = AD \cdot AC$. 于是 D，C，F，E 四点共圆，记为 Γ.

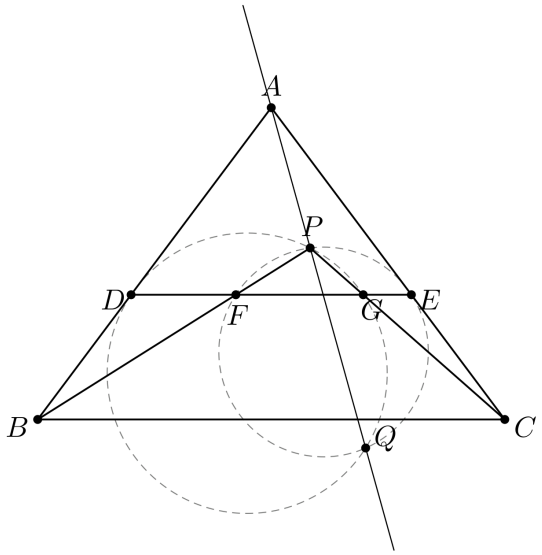
弦 DE 和 CF 中垂线的交点 M 必为 Γ 的圆心.

由于 M 在 CD 上，故 CD 为 Γ 的一条直径，即 M 为 CD 的中点. 因此

$$\frac{MC}{AC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{DC}{AC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$

即 $\dfrac{AM}{MC} = \dfrac{5}{3}$.

1. 点 D、点 E 分别为 $\triangle ABC$ 的边 AB、AC 上一点，且 DE 平行于 BC. P 为 $\triangle ADE$ 内部任意一点，PB、PC 分别和 DE 交于点 F、G. $\triangle PDG$ 和 $\triangle PFE$ 的另一个交点为 Q. 求证：A、P、Q 三点共线.



证明：

设 $\triangle DPG$ 的外接圆和 AB 再次交于点 M，$\triangle EPF$ 的外接圆和 AC 再次交于点 N.

只考虑 M 和 N 在线段 AB 和 AC 上的情形，其余情形类似.

由 $\angle ABC = \angle ADG = 180^\circ - \angle BDG = 180^\circ - \angle MPC$ 知，B、M、P、C 四点共圆，同理 B、P、N、C 四点共圆.

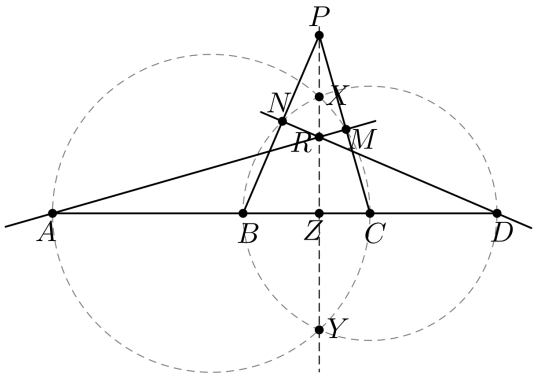
于是 B、C、N、P、M 五点共圆.

因此 $\angle ANM = \angle ABC = \angle ADE$，即 M、N、D、E 四点共圆. 由圆幂定理：

$$AD \cdot AM = AE \cdot AN$$

即点 A 对 $\triangle DPG$ 和 $\triangle EPF$ 的外接圆等幂，因此在它们的根轴上，即 A、P、Q 三点共线.

1. **(1995 年 IMO)** 设 A、B、C、D 是按顺序在一条线上的四个不同的点. 分别以 AC 和 BD 为直径的圆交于 X 和 Y. 直线 XY 交 BC 于 Z. 设 P 是直线 XY 上不同于 Z 的一点. 直线 CP 交以 AC 为直径的圆于 C 和 M，直线 BP 交以 BD 为直径的圆于 B 和 N. 求证：直线 AM、DN、XY 共点.



证明：

由圆幂定理：

$$PM \cdot PC = PX \cdot PY = PN \cdot PB$$

于是 B、C、M、N 四点共圆.

由题意知：$\angle AMC = \angle BND = 90°$.

于是

$\angle MND = 90° + \angle MNB = 90° + \angle MCA = 180° - \angle MAD$

即 A、D、N、M 四点共圆.

因此 AM、DN、XY 分别为圆 $AMXC$、$BXND$、$AMND$ 两两的根轴，所以三线共点于根心.

更多圆幂相关问题，可以参考金磊老师编著的《圆幂与根轴》一书.