2021 年广西预赛题的构造思路

2021-11-30　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_2b76b627a79726ac

2021 年广西预赛的最后一题为：

题目 1 某校 n 名同学通过选拔进入学校的数学讨论班．在一次讨论班上他们讨论 A、B 和 C 三个问题．已知每位同学都和班里的其他所有同学讨论了其中的一个问题，每两位同学只讨论一个问题．若至少有 3 名同学互相之间讨论的是同一个问题，求 n 的最小值，并给出证明．

事实上，这道题就是要证明拉姆塞数 $r(3,3,3)=17$．$r(3,3,3)\geq 17$ 由抽屉原理容易证明，也就是第六届 IMO 的第 4 题：

题目 2 十七个人互相通信，每一个人都和其他人写信．在他们的信上一共讨论有三个不同的话题，每两个人只讨论一个话题，求证：这些人当中至少有三个人他们所讨论的话题是一样的．

而 $n=16$ 时反例的构造则不那么自然，参考答案如下：

当 $n=16$ 时，考虑二进制下的集合

$$G=0000,0001,\cdots,1111,$$

集合中的每一个数表示一名同学，对集合中的元素施以“按位加”$(+)$ 运算，即不考虑进位，同位相同则为 0，同位相异则 1．如 $1010+1100=0110$．设

$$V_1=\{1100,0011,1001,1110,1000\},$$

$$V_2=\{1010,0101,0110,1101,0100\},$$

$$V_3=\{0001,0010,0111,1011,1111\}.$$

若 $x,y\in G$，易知 $x+y\in G$．用 $x+y\in V_i(i=1,2,3)$ 表示同学 x 和同学 y 讨论第 i 个问题；用 $x\in V_i(i=1,2,3)$ 表示同学 0000 和同学 x 讨论第 i 个问题．

按照上述规定，没有 3 位同学互相之间讨论同一个问题．因此 $n\geq 17$．

这个构造可能会让人摸不着头脑，其实它的背景是循环群．下面给出另一个证明：(来源：《Ramsey 数 $N(3,3,3;2)=17$ 的一种证法》邵卫)

设 $f(x)=x^4+x+1$ 是域 $F:=\mathbb{Z}_2=\{0,1\}$ 上的多项式，显然 $f(x)$ 在 F 上不可约．设 α 为 $f(x)$ 的一个根，则存在 F 的单纯代数扩域 $F(\alpha)$，$F(\alpha)$ 的一切元均可表为

$$a_0+a_1\alpha+a_2\alpha^2+a_3\alpha^3(a_i\in F,i=0,1,2,3)$$

因 $F:=\mathbb{Z}_2=\{0,1\}$，所以 $F(\alpha)$ 中有 $2^4=16$ 个元素，即

$$F(\alpha)=\{0,1,\alpha,\alpha+1,\cdots,1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3\}$$

其中，α 在 F 上的极小多项式为 $f(x)$，且

$$f(\alpha)=\alpha^4+\alpha+1=0——(1)$$

利用 (1) 式知

$$F(\alpha)=\{0,1,\alpha,\alpha^2,\alpha^3,\cdots,\alpha^{14}\}——(2)$$

所以 $F(\alpha)$ 中的所有非零元素组成一个乘法群为循环群，记为 $M=(\alpha)$. 则子群

$$\begin{aligned}&H_1:=H=(\alpha^3)=\{1,\alpha^3,\alpha^6,\alpha^9,\alpha^{12}\}\\=&\{1,\alpha^3,\alpha^3+\alpha^2,\alpha^3+\alpha,\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1\}\\=&\{(1,0,0,0),(0,0,0,1),(0,0,1,1),(0,1,0,1),(1,1,1,1)\}\end{aligned}$$

为循环群.

作陪集

$$\begin{aligned}&H_2:=\alpha H=\{\alpha,\alpha^4,\alpha^7,\alpha^{10},\alpha^{13}\}\\=&\{\alpha,\alpha+1,\alpha^3+\alpha+1,\alpha^2+\alpha+1,\alpha^3+\alpha^2+1\}\\=&\{(0,1,0,0),(1,1,0,0),(1,1,0,1),(1,1,1,0),(1,0,1,1)\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&H_3:=\alpha^2H=\{\alpha^2,\alpha^5,\alpha^8,\alpha^{11},\alpha^{14}\}\\=&\{\alpha^2,\alpha^2+\alpha,\alpha^2+1,\alpha^3+\alpha^2+\alpha,\alpha^3+1\}\\=&\{(0,0,1,0),(0,1,1,0),(1,0,1,0),(0,1,1,1),(1,0,0,1)\}\end{aligned}$$

设 $Q=\{(x,y)|x\neq y且x,y\in F(\alpha)\}$ 是 $F(\alpha)$ 的一个二元子集. 定义映射 $\varphi:Q\to\{1,2,3\}$，满足

$$\varphi(x,y)=i\iff x+y\in H_i,i=1,2,3$$

则对任意固定的 i，不可能存在 $F(\alpha)$ 的三元子集 U 使得 $U\subseteq\varphi^{-1}(i)$. 不失一般性，我们不妨设

$$U=\{0,1,x\}\subseteq\varphi^{-1}(1)$$

由

$$\varphi(x,y)=i\iff x+y\in H_i,i=1,2,3$$

应有 $x,1+x\in H_1$，但由 H_1 的定义即知这是不可能的，从而 $n>16$.