韦达跳跃 (Vieta Jumping) 的几道例题

2021-05-06 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_2b83fa20efe1e1ef

昨天转载有关韦达跳跃（Vieta Jumping）的几篇文章，今天再补充几道题目.

题目 1（1988 年 IMO 第 6 题）设正整数 a，b 满足 $ab+1 \mid a^2+b^2$. 求证：$\dfrac{a^2+b^2}{ab+1}$ 为一个完全平方数.

解答（PDF 中已展开）

分析这是韦达跳跃这一技巧首次在大型竞赛中出现，本题被认为是当年最难的题目. 有关本题的介绍可见：这是一道难倒了 49 个国家领队外加 4 个专家的竞赛题，抢了当年 12 岁获得 IMO 金牌陶哲轩的风头，堪称数学竞赛史上最传奇的一道题

证明设 $\dfrac{a^2+b^2}{ab+1}=q$，则

$$a^2+b^2=q(ab+1),$$

因而 (a,b) 是不定方程

$$x^2+y^2=q(xy+1)$$

的一组（整数解）.

如果 q 不是完全平方，那么上述方程的整数解中，x、y 均不为 0，因而

$$q(xy+1)=x^2+y^2>0,$$

于是 $xy>-1$，即 $xy>0$，也即 x，y 同号.

现在设 a_0，b_0 是上述方程的正整数解中，使 a_0+b_0 为最小的一组解，且 $a_0 \geq b_0$. 那么 a_0 是方程

$$x^2-qb_0x+(b_0^2-q)=0$$

的解.

由韦达定理，此方程的另一个解是

$$a_1=qb_0=a_0.$$

a_1 是整数，而且 (a_1,b_0) 也是不定方程

$$x^2+y^2=q(xy+1)$$

的一组（整数解）. 所以 a_1 和 b_0 同为正. 但由韦达定理

$$a_1=\frac{b_0^2-q}{a_0}<\frac{b_0^2}{a_0}\leq a_0$$

与 a_0+b_0 为最小矛盾. 这说明 q 一定是完全平方.

本题还有以下两个推广:

推广 1 设正整数 a, b 满足 $ab+1 \mid a^2+b^2$. 求证: $\dfrac{a^2+b^2}{ab+1}=\gcd(a,b)^2$.

推广 2 设正整数 a, b, c 满足

$$0<a^2+b^2-abc\leq c,$$

求证: a^2+b^2-abc

为完全平方数.

题目 2 (2007 年 IMO 第 5 题) 设 a 与 b 为正整数. 已知 $4ab-1$ 整除 $(4a^2-1)^2$, 证明: $a=b$.

题目 3 (2020 年清华大学 "大中衔接" 第 3 题) 设整数 $n>1$. 证明: 至多只有有限多个正整数 a, 使得方程

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=ax_1x_2\cdots x_n$$

有非零整数解.

注: 这几题网上都能找到解答, 我就不另外抄一遍了.