2023 年印度 NMTC 初中数学竞赛

2023-11-10 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_2bc685eec68c78b0

2023 年印度 NMTC 初中数学竞赛

程国根 译

1. 求整数 m,n，使得它们的立方和等于和的平方.

2. 在锐角 $\triangle PQR$ 中，高 PL 和 $\angle QRP$ 的角平分线 RK 交于点 H（L 在 QR 上，K 在 PQ 上）. $\triangle PKR$ 的高 KM 和 PL 交于点 N. $\triangle NKR$ 的外接圆和 QR 交于点 S（异于 Q）. 求证：$\triangle SHK$ 为等腰三角形.

3. 设 $a_i(1 \leq i \leq 6)$ 为实数，多项式 $f(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 + a_5x^4 + a_6a^5 + 7x^6 - 4x^7 + x^8$ 能被分解为一次因式 $x - x_i$ 之积，其中 $x_i(1 \leq i \leq 8)$ 为实数. 求 a_1 的所有可能值.

4. 设 n 为偶数，n 个袋子中共装有 $2n$ 个苹果，每个袋子中苹果个数至少为 1，至多为 n. 求证：总能将袋子分成两部分，其中每个部分的苹果个数都为 n.

5. 正实数 a,b,c 满足

$$\frac{2}{5}\le c\le \min\{a,b\}, ac\ge\frac{4}{15}, bc\ge\frac{1}{5}.$$

求 $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}$ 的最大值.

6. 实数 x,y,z,u 的平方和为 1. 求

$$E=(x-y)(y-z)(z-u)(u-x)$$

的最小值，并说明取得最小值时 x,y,z,u 的取值.

注：本题为 2022 年亚太地区数学奥林匹克第 5 题

7. 设 n 为正整数，记 $S(n)$ 为 n 在十进制表示下的数码和. 将 n 的十进制表示从右端删去一个或多个数码称为 n 的截断，记 n 的所有截断之和为 $T(n)$. 求证：$S(n)+9T(n)=n$.

8. 设 $ABCD$ 为圆内接四边形，对角线 AC 和 BD 的中点分别为 P 和 Q. 若 BD 平分 $\angle AQC$，求证：AC 平分 $\angle BPD$.

注：本题为 2011 年全国高中数学联赛二试第一题

2

2023 年印度 NMTC 初中数学竞赛

程国根　译

1. 求整数 m,n，使得它们的立方和等于和的平方.

2. 在锐角 $\triangle PQR$中，高 PL和 $\angle QRP$的角平分线 RK交于点 H（L在 QR上，K在 PQ上）. $\triangle PKR$的高 KM和 PL交于点 N. $\triangle NKR$的外接圆和 QR交于点 S（异于 Q）. 求证：$\triangle SHK$为等腰三角形.

3. 设 $a_{i}(1\le i\le 6)$为实数，多项式 $f(x)=a_1+a_2x+a_3x^2+a_4x^3+a_5x^4+a_6a^5+7x^6-4x^7+x^8$能被分解为一次因式 $x-x_{i}$之积，其中 $x_{i}(1\le i\le 8)$为实数. 求 a_{1}的所有可能值.

4. 设 n为偶数，n个袋子中共装有 $2n$个苹果，每个袋子中苹果个数至少为 1，至多为 n. 求证：总能将袋子分成两部分，其中每个部分的苹果个数都为 n.

5. 正实数 a,b,c满足 $$\dfrac{2}{5}\le c\le \min\{a,b\},ac\ge\dfrac{4}{15},bc\ge\dfrac{1}{5}.$$求 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{3}{c}$的最大值.

6. 实数 x,y,z,u的平方和为 1. 求 $$E=(x-y)(y-z)(z-u)(u-x)$$的最小值，并说明取得最小值时 x,y,z,u的取值. **注：本题为 2022年亚太地区数学奥林匹克第 5 题**

7. 设 n为正整数，记 $S(n)$为 n在十进制表示下的数码和. 将 n的十进制表示从右端删去一个或多个数码称为 n的截断，记 n的所有截断之和为 $T(n)$. 求证：$S(n)+9T(n)=n$.

8. 设 $ABCD$为圆内接四边形，对角线 AC和 BD的中点分别为 P和 Q. 若 BD平分 $\angle AQC$，求证：AC平分 $\angle BPD$. **注：本题为 2011 年全国高中数学联赛二试第一题**

解答（PDF 中已展开）

```
\section*{2023年印度NMTC初中数学竞赛}\flushright 程国根\quad 译\ex 求整数$m,n$，使得它们的立方和等于和的平方. \vfill\ex
↪ 在锐角$\triangle PQR$中，高$PL$和$\angle QRP$的角平分线$RK$交于点$H$（$L$在$QR$上，$K$在$PQ$上）.
↪ $\triangle PKR$的高$KM$和$PL$交于点$N$. $\triangle NKR$的外接圆和$QR$交于点$S$（异于$Q$）. 求证：$\triangle
↪ SHK$为等腰三角形. \vfill\ex 设$a_{i}(1\le i\le 6)$为实数，
↪ 多项式$f(x)=a_1+a_2x+a_3x^2+a_4x^3+a_5x^4+a_6a^5+7x^6-4x^7+x^8$能被分解为一次因式$x-x_{i}$之积，其中$x_{i}(1\le
↪ i\le 8)$为实数. 求$a_{1}$的所有可能值. \vfill\ex 设$n$为偶数，$n$个袋子中共装有$2n$个苹果，
↪ 每个袋子中苹果个数至少为$1$，至多为$n$. 求证：总能将袋子分成两部分，其中每个部分的苹果个数都为$n$.
↪ \vfill\newpage\ex 正实数$a,b,c$满足$$\dfrac{2}{5}\le c\le
↪ \min\{a,b\},ac\ge\dfrac{4}{15},bc\ge\dfrac{1}{5}.$$求$\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{3}{c}$的最大值. \vfill\ex
↪ 实数$x,y,z,u$的平方和为$1$. 求$$E=(x-y)(y-z)(z-u)(u-x)$$的最小值，并说明取得最小值时$x,y,z,u$的取值.
\textbf{注：本题为$2022$年亚太地区数学奥林匹克第5题}\vfill\ex 设$n$为正整数，记$S(n)$为$n$在十进制表示下的数码和.
↪ 将$n$的十进制表示从右端删去一个或多个数码称为$n$的截断，记$n$的所有截断之和为$T(n)$. 求证：$S(n)+9T(n)=n$.
↪ \vfill\ex 设$ABCD$为圆内接四边形，对角线$AC$和$BD$的中点分别为$P$和$Q$. 若$BD$平分$\angle AQC$，求证：
↪ $AC$平分$\angle BPD$.
\textbf{注：本题为 2011 年全国高中数学联赛二试第一题}\vfill
```