有理根判定定理的一个妙用

2021-07-09 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_2c1165e125c7064a

今天在上课时给初中的学生介绍了整系数多项式的有理根判定定理：

定理设 $\frac{p}{q}(\frac{p}{q}\neq 0)$ 是整系数多项式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$$

的一个有理根，其中 p 和 q 为互素的整数．则 $p\mid a_0$，$q\mid a_n$.

解答（PDF 中已展开）

证明

$$q^nf\left(\frac{p}{q}\right)=a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}q+\cdots+a_1pq^{n-1}+a_0q^n=0$$

注意到除 a_np^n 外，其余每一项中均有 q，于是必有 $q\mid a_np^n$，而 p 和 q 互素，于是 $q\mid a_n$．同理可证 $p\mid a_0$.

这个定理一般用于求出多项式有理根的可能取值集合．例如解方程

$$3x^3-5x^2+5x-2=0$$

若其有有理根，则必为 $\{\pm1,\pm2,\pm\frac{1}{3},\pm\frac{2}{3}\}$ 中的某个．然后逐一代入检验即可.

在讲完这类题后，我觉得有些枯燥．于是想起了一道有意思的数论题，分享给大家：

题目整数 a，b，c 满足 $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$ 和 $\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}$ 仍为整数．求证：$|a|=|b|=|c|$.

解答（PDF 中已展开）

证明构造多项式

$$\begin{aligned}f(x)=&\left(x-\frac{a}{b}\right)\left(x-\frac{b}{c}\right)\left(x-\frac{c}{a}\right)\\=&x^3-\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)x^2+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}\right)x-1\end{aligned}$$

由题意知，这是一个整系数多项式．其有三个有理根 $\frac{a}{b}$，$\frac{b}{c}$，$\frac{c}{a}$.

而由有理根判定定理，此多项式的有理根只能为 ±1，于是

$$\left|\frac{a}{b}\right|=\left|\frac{b}{c}\right|=\left|\frac{c}{a}\right|=1$$

即 $|a|=|b|=|c|=1$.