2021 年马其顿初中数学奥林匹克

2021-06-11 原文链接

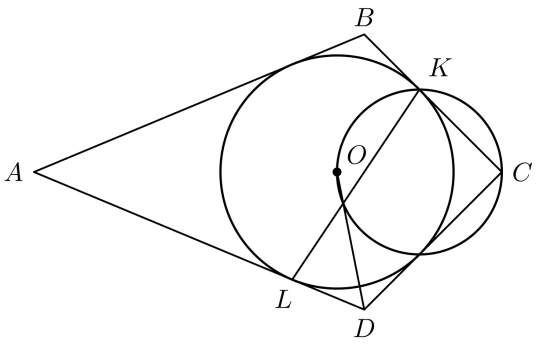
网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_2c6570d6003ee7d5

相关链接：2021 年马其顿数学奥林匹克——中文翻译

2021 年马其顿初中数学奥林匹克

1. 在今年的奥林匹克竞赛中，有一些学生是朋友（朋友关系是相互的），也有一些学生不是朋友．不论将这些学生怎样分到两个考场，总有两个朋友在不同的考场．令 A 为一个固定的学生，求证：一定存在两个学生 B 和 C，使得 $\{A,B,C\}$ 中恰好有两对朋友．

2. 设 $ABCD$ 为一个圆外切四边形，其内切圆 $k(O,r)$ 与边 BC、AD 分别切于点 K、L．求证：以 OC 为直径的圆过 KL 和 OD 的交点．



3. 求所有正整数 n 和素数 p 满足

$$17^n \cdot 2^{n^2} - p = \left(2^{n^2+3} + 2^{n^2} - 1\right) \cdot n^2.$$

4. a，b，c 为满足 $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} = \dfrac{27}{4}$ 的正实数．求证：

$$\frac{a^3+b^2}{a^2+b^2} + \frac{b^3+c^2}{b^2+c^2} + \frac{c^3+a^2}{c^2+a^2} \geq \frac{5}{2}.$$

5. 设 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，点 X 和 Y 分别在 AB 和 AC 上，满足 $BX = CY$. I_B 和 I_C 分别为 $\triangle ABY$ 和 $\triangle ACX$ 的内心，T 为 $\triangle ABY$ 和 $\triangle ACX$ 的外接圆的另一交点. 求证: $\dfrac{TI_B}{TI_C} = \dfrac{BY}{CX}$.

