Mathematical Reflections 2021 年第六期征解题

2021-11-19 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_2d4b99f9ac7997c0

初级组 (Junior Preblems)

J571. 二次方程

$$m^5x^2-\left(m^7+m^6-m^4-m\right)x+m^8-m^5-m^3+1=0$$

的两根为 x_1，x_2，其中 m 为实参数. 求证：$x_1=1$ 当且仅当 $x_2=1$.

J572. 正实数 a，b，c 满足 $a^2+b^2+c^2=3$. 求证：

$$a+b+c+\frac{3}{ab+bc+ca}\geq 4.$$

J573. 求证：在任意三角形 $\triangle ABC$ 中，有

$$\sin\frac{A}{2}+2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leq 1.$$

J574. 正实数 a，b，c 满足 $ab+bc+ca=1$，且

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2\left(b+\frac{1}{b}\right)^2-\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\left(c+\frac{1}{c}\right)^2+\left(c+\frac{1}{c}\right)^2\left(a+\frac{1}{a}\right)^2=1.$$

求证：$a=1$.

J575. 过圆 ω 外一点 C，作圆的两条切线，分别切圆于点 A，B. 点 D 在线段 AB 上，M 为 CD 中点. 过 M 作 ω 的一条切线，与 ω 切于点 X. 求证：CX 和 DX 垂直.

J576. 正实数 a，b，c，d 满足

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}+\frac{1}{1+d}=1.$$

求证：

$$ab+ac+ad+bc+bd+cd-3(a+b+c+d)\geq 18.$$

高级组 (Senior Problems)

S571. 非零实数 a 满足存在实数 $b\geq 1$，使得

$$a^3+\frac{1}{a^3}=b\sqrt{b+3}.$$

求证：

$$a^2+\frac{1}{a^2}=b+1.$$

S572. 求证：在任意三角形 $\triangle ABC$ 中，有

$$\frac{9}{4}\sqrt{\frac{r}{2R}}\le\sqrt{3}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\le 1+\frac{r}{4R}.$$

S573. A，B，C，D 四点顺次排列在一条直线上．设 O_1 和 O_2 分别为以 AB 和 CD 为直径的圆．圆 ω 同时和 O_1，O_2 外切，圆 Ω 同时和 O_1，O_2 内切．ω 和 Ω 交于 E，F 两点．求证：$\angle AEB=\angle CFD$.

S574. 求所有实数 x，使得

$$\left\{\frac{6x^2+168x+2022}{x^2+24x+237}\right\}=\frac{6}{7}.$$

其中 $\{x\}=x-[x]$ 为 x 的小数部分.

S575. 锐角三角形 $\triangle ABC$ 的垂心为 H．A_1，B_1，C_1 分别为 BC，CA，AB 的中点．A_2，B_2，C_2 分别为线段 HA_1，HB_1，HC_1 上的点，且满足

$$\frac{HA_2}{A_2A_1}=\frac{HB_2}{B_2B_1}=\frac{HC_2}{C_2C_1}=2.$$

求证：AA_2，BB_2，CC_2 三线共点.

S576. 正实数 a_1，a_2，$\cdots$，a_n 满足 $a_1+a_2+\cdots+a_n=\sqrt{n}$．求证：

$$\left(a_1+\frac{1}{a_1}\right)^2+\left(a_2+\frac{1}{a_2}\right)^2+\cdots+\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)^2\ge(n+1)^2.$$

大学组 (Undergraduate Problems)

U571. 设 A 为 $n\times n$ 的实矩阵，实数 $\alpha\neq 0$．求证：若 $A^3=I$ 且 $(A-\alpha I)^3=0$，则对任意 $n\times n$ 的矩阵 B，都有 $AB=BA$.

U572. 计算：

$$\int\left(x+\frac{1}{4x}\right)\frac{e^x}{\sqrt{x}}dx.$$

U573. 求证：

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k2^{\frac{k+1}{2}}}{3^{2^k-1}}<e.$$

U574. 连续函数 $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ 满足 $\int_a^b f(x)dx>0$. 求证：对任意正实数 $c<(b-a)^2$，存在 $\varepsilon\in(a,b)$，使得

$$\int_a^b f(x)dx>\frac{c}{b-a}f(\varepsilon).$$

U575. 连续函数 $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ 满足 $f(0)=0$. 求证：存在 $c\in(0,1)$，使得

$$\int_0^c(1-x)^2f(x)dx=(1-c)\int_0^c f(x)dx.$$

U576. 求所有三元正整数组 (m,n,p)，满足存在实系数多项式 $P(x)$，使得

$$P(x)+x^mP(1-x)=\left(x^2-x+1\right)^n\left(x^2-x-1\right)^p.$$

并确定是否有无穷多个这样的多项式.

奥林匹克问题 (Olympiad Problems)

O571. 正实数 a，b，c，d 满足

$$abcd=ab+ac+ad+bc+bd+cd.$$

求证:

$$\sum_{sym}abc-2\sum_{sym}ab+3\sum_{sym}a\geq 36(\sqrt{6}-2).$$

O572. a，b，c，d 为正整数，C 为非零整数. 映射 $f\colon\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ 满足对任意整数 m，n，都有 $f(mn)=f(m)f(n)$. 且存在 N 满足对任意 $n\geq N$，都有

$$f(c(an+b)+d)\equiv C\pmod{an+b}.$$

求证：存在整数 e，使得对任意和 ac 互素的整数 n，都有 $|f(n)|=|n|^e$.

O573. 求所有函数 $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，满足对任意 x，$y\in\mathbb{R}$，都有

$$x+f\left(x^2+f(y)\right)=xf(x)+f(x+y).$$

O574. 线段 AB 为圆 Γ 的一条弦. 圆 ω_1 和 ω_2 分别和 Γ 内切于点 P 和点 Q，且和 AB 交于同一点. 弦 AB 和 PQ 交于点 D. 设 C 为 Γ 上包含点 P 的弧 AB 的中点. 求证：直线 CD 过

ω_1 的圆心.

O575. 设 $\{L_n\}_{n\geq 1}$ 为 Lucas 数列，$L_1=1$，$L_2=3$，对于 $n=2,3,\cdots$，有 $L_{n+2}=L_{n+1}+L_n$. 求证：若存在正整数 m，使得
$n=\dfrac{1}{4}\left(L_{6m+1}-1\right)$，则 $\prod\limits_{k=0}^{n}\left[(4k-1)^4+64\right]$ 为完全平方数.

O576. 设 $\triangle ABC$ 的三边长为 a，b，c，三边所对应的中线长分别为 m_a，m_b，m_c. 求证：

$$m_a^3\left(bc-a^2\right)+m_b^3\left(ca-b^2\right)+m_c^3\left(ab-c^2\right)\geq 0.$$