2023 年哈佛-麻省邀请赛（HMIC）

2023-05-11　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_2d9a61d4e0cc3758

2023 年哈佛-麻省邀请赛（HMIC）
——中文翻译

程国根　译

1. 求所有函数 $f:\mathbb{Q}^+\to\mathbb{Q}^+$，使得对任意正有理数 x,y，都有

$$f(x)=f(x+y)+f(x+x^2f(y)).$$

2. 称素数 p 是**平凡的**，如果存在小于 $\frac{p}{2}$ 的正整数 a,b，使得 $\frac{ab-1}{p}$ 是正整数．求所有非**平凡的**素数．

3. $\triangle ABC$ 的内切圆为 ω，A 所对的旁切圆为 ω_A．圆 γ_B 过点 B 且和 ω,ω_A 均外切，圆 γ_C 过点 C 且和 ω,ω_A 均外切．设 γ_B 和 BC 的另一个交点为 D，γ_C 和 BC 的另一个交点为 E，求证：$BD=EC$．

4. 设 $n>1$ 为正整数．Claire 在黑板上写下由 n 个不同的正实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 构成的数列．在每一次操作中，William 可以擦去一个数 x，并在相同位置写下 $\dfrac{1}{x}$ 或 $x+1$ 作为替代．他的目标是通过一系列的操作，将黑板上的数列变为严格递增的．求证：

(1) 存在一个不依赖于 n 的正常数 A，使得 William 可以在至多 $An\log n$ 次操作内达到目标．

(2) 存在一个不依赖于 n 的正常数 B，使得 Claire 可以通过选择黑板上的初始数列，令 William 无法在 $Bn\log n$ 次操作内达到目标．

5. 无穷正整数列 $a_1,a_2,\cdots$ 满足：对任意正整数 m,n，都有 $a_{m+n}\mid a_ma_n-1$．求证：存在整数 C，使得对任意正整数 $k>C$，都有 $a_k=1$．

附 tex 文档：

解答（PDF 中已展开）

```
\documentclass{ctexart}
\usepackage{amsfonts}
\usepackage{amsmath}
\usepackage{enumitem}
\usepackage{geometry}
\usepackage{setspace}
\geometry{a6paper,left=1cm,right=1cm,top=0.5cm,bottom=0.8cm}
\usepackage{hyperref}
\begin{document}
```