2024 年高联几何题另证

2024-09-24 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_2eba354ff3475212

今年高中数学联赛已过去半个多月，这里发一个我对平面几何题的另解，思路来源于学生在考场上的想法，但后半部分并未完成，我用线性幂差引理续上了这个证明.

> 线性幂差引理：对两定圆 ω_1,ω_2 和一动点，$f(X)=P(X,\omega_1)-P(X,\omega_2)$ 关于 X 是线性的. 这里 $P(X,\omega)$ 表示点 X 对圆 ω 的圆幂.

引理的证明：

设 ω_i 的圆心为 (x_i,y_i)，半径为 r_i，$i=1,2$.

则

$$\begin{aligned}f(X)=&P(X,\omega_1)-P(X,\omega_2)\\=&(XO_1^2-r_1^2)-(XO_2^2-r_2^2)\\=&(x-x_1)^2+(y-y_1)^2-r_1^2-(x-x_2)^2-(y-y_2)^2+r_2^2\\=&(-2x_1+2x_2)x+(-2y_1+2y_2)y+(x_1^2-x_2^2+y_1^2-y_2^2-r_1^2+r_2^2)\end{aligned}$$

显然是关于 x,y 线性的.

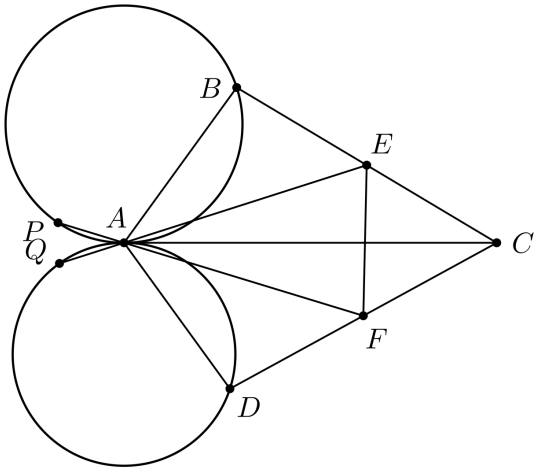
推论：对三点 A,B,X，若 $\overrightarrow{OX}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$ $(\lambda+\mu=1)$，即 X 在直线 AB 上，则 $f(X)=\lambda f(A)+\mu f(B)$.

线性幂差引理是对圆幂更深入的研究，适合用于有两圆以及三点共线的问题.

下面我们来看今年高联的平面几何题：

题目

如图，在凸四边形 $ABCD$ 中，AC 平分 $\angle BAD$，点 E,F 分别在边 BC,CD 上，满足 $EF\parallel BD$. 分别延长 FA,EA 至点 P,Q，使得过点 A,B,P 的圆 ω_1 及过点 A,D,Q 的圆 ω_2 均与直线 AC 相切. 证明：B,P,Q,D 四点共圆.



解答（PDF 中已展开）

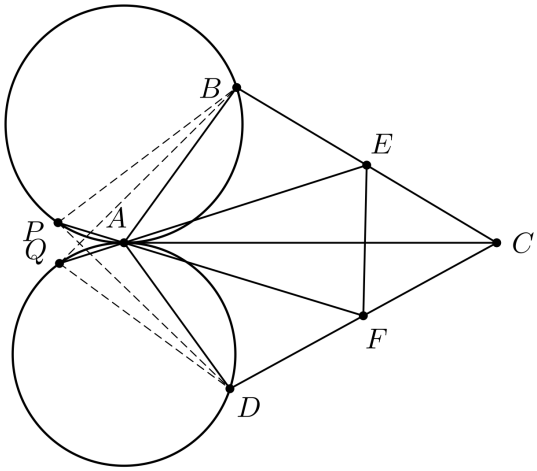
分析

最直接地，要想证明 B,P,Q,D 四点共圆，从角考虑，只需证明 $\angle BPD=\angle BQD$.

利用切线和角平分线导角可得：

$\angle BPA=\angle BAC=\angle DAC=\angle DQA$.

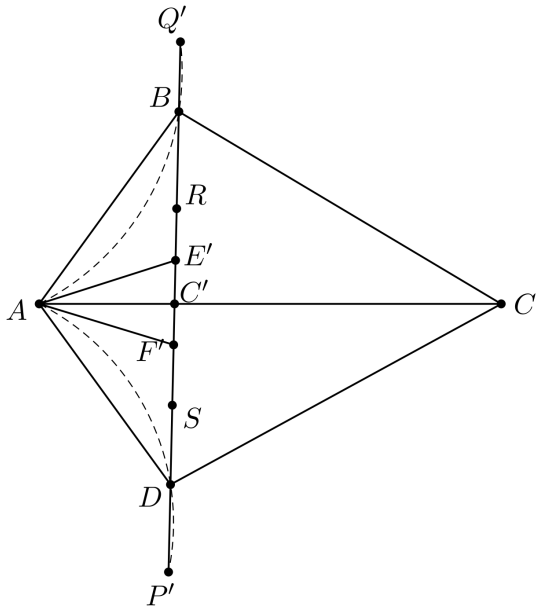
故只需证明：$\angle APB=\angle AQD$.



这里能转为一组新的四点共圆，但需要构造出新的交点，比较麻烦，于是想办法将这两个角转移.

设 $\triangle APD$ 的外接圆与 BD 的另一交点为点 P'，则 $\angle APD = \angle AP'D$；设 $\triangle AQB$ 的外接圆与 BD 的另一交点为点 Q'，则 $\angle AQB = \angle AQ'B$.

只需证明：$\angle AP'D = \angle AQ'B$，即 $AP' = AQ'$.



如图，设 ω_1 和 BD 的另一交点为 R，ω_2 和 BD 的另一交点为 S，AE, AF, AC 分别交 BD 于点 E', F', C'.

由 $\angle ARS = \angle APB = \angle AQD = \angle ASR$ 知，$AR = AS$. 故只需证明：$RQ' = SP'$.

设 $f(X) = P(X, \omega_1) - P(X, \omega_2)$. 则

$$\begin{aligned} f(E') &= E'B \cdot E'R - E'A \cdot E'Q \\ &= E'B \cdot E'R - E'B \cdot E'Q' \\ &= -E'B \cdot RQ' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(F') &= F'A \cdot F'P + F'D \cdot F'S \\ &= F'D \cdot F'P' + F'D \cdot F'S \\ &= F'D \cdot SP' \end{aligned}$$

于是由线性幂差引理，

$$\begin{aligned} & f(C') \\ =& \frac{E'C'}{E'F'} \cdot f(F') + \frac{C'F'}{E'F'} \cdot f(E') \\ =& \frac{E'C'}{E'F'} \cdot F'D \cdot SP' - \frac{C'F'}{E'F'} \cdot E'B \cdot RQ' \end{aligned}$$

由点 C' 在 ω_1 和 ω_2 的公切线上知 $f(C') = 0$，要证明 $RQ' = SP'$，只需证明：

$$\begin{aligned} & E'C' \cdot F'D = C'F' \cdot E'B \\ \iff & \frac{BE'}{E'C'} = \frac{DF'}{F'C'} \\ \iff & \frac{AB \sin \angle BAE'}{AC' \sin \angle E'AC'} = \frac{AD \sin \angle DAF'}{AC' \sin \angle F'AC'} \\ \iff & \frac{AB \sin \angle BAE}{AC \sin \angle EAC} = \frac{AD \sin \angle DAF}{AC \sin \angle FAC} \\ \iff & \frac{BE}{EC} = \frac{DF}{FC} \end{aligned}$$

这由 $EF \parallel BC$ 即证.