2026 年韩国数学夏令营

2026-08-11 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_2f0a8b19597b0ec4

高级组

P1

给定两两互质的正整数 a, b, c. 若

$$a+b+c \mid ab+bc+ca,$$

证明：$a+b+c$ 除以 3 所得的余数不可能为 2.

P2

设正实数数列 $a_1, a_2, \ldots$ 对每个正整数 $n \geq 2$ 都满足

$$\frac{a_1+\cdots+a_n}{n} = \sqrt[n+1]{a_1 \cdots a_{n+1}}.$$

若 $a_1 \neq a_2$，证明：对于任意实数 M，都存在正整数 n，使得

$$a_n > M.$$

P3

设 P 为三角形 ABC 的内部一点，O 为三角形 ABC 的外心. 设 Q 为三角形 APB 的外心，R 为三角形 APC 的外心.

直线 PQ 与 AB 相交于 X，直线 PR 与 AC 相交于 Y. 已知

$$PO \parallel XY,$$

证明：A, X, P, Y 四点共圆.

P4

在沃拉里亚，有 n $(n \geq 5)$ 支职业足球队，各队的排名互不相同. 这里进行的每场比赛都没有平局；若排名较低的球队击败排名较高的球队，就称这场比赛为一次爆冷.

足球协会的新任主席韩俊目前完全不知道任何球队的排名. 为了确定所有球队的排名，他计划每天安排一场比赛. 每天比赛结束后，他可以根据已经获得的信息决定第二天交锋的两支球队，但安排必须始终满足以下条件：

1. 对任意球队，它连续参加的两场比赛中，对手不能相同.
2. 对任意球队，它所参加的任意连续两场比赛中，至少有一场不是爆冷.
3. 对任意球队，它所参加的任意连续 n 场比赛中，至少有一场是爆冷.

证明：存在常数 C，使得韩俊能够在

$Cn^{2.026}$

天之内确定所有球队的排名.

初级组

P1

有一个 $2n \times 2n$ 的方格板. 把从一个 1×1 单位正方形的四条边中删去一条边后得到的“⊏”形图形称为三边框.

求所有满足下述条件的 n：仅使用这种三边框，就能覆盖该方格板的所有单位边.

P2

设 ω 为三角形 ABC 的外接圆. 点 D 位于 ω 的弧 BC 上，点 T 位于三角形 ABC 内部，并满足

$\angle ABT = \angle CBD, \qquad \angle ACT = \angle BCD.$

证明：

$AT = TD.$

P3

判断是否存在函数 $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，使得对所有 $x \in \mathbb{R}$ 都有

$f(g(x)) = x^3 - x, \qquad g(f(x)) = x^3 + x.$

P4

对于正整数 n，令 $s(n)$ 为满足下述条件的最小正整数 k：存在正整数 m，使得

$n = m^2 k.$

对于正整数 x，定义函数 $p(x)$ 为

$$p(x)=\begin{cases} x \text{ 的最大素因子}, & x\neq 1,\\ 0, & x=1. \end{cases}$$

定义正整数数列 $\{a_n\}$，使其满足

$a_{n+1}=s\big(a_n+p(a_n)\big)$.

证明：存在正整数 N,T，使得对所有 $n\geq N$，都有

$a_{n+T}=a_n$.