青岛高三开学考压轴题？广东预赛加试题！

2025-09-16 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_2f2c29004f3748a6

这是前两天青岛高三开学考的第 18 题：

18.（17分）

已知函数 $f(x)=(8-x)(\ln x+a)$.

（1）若 $a=1$，求曲线 $y=f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（2）若 $f(x)$ 的最大值为 4，所有零点之和小于 16.

（ⅰ）求 a 的值；

（ⅱ）若非负实数 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 满足 $\sum_{i=1}^{5}x_i^2=4$，求 $(\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{1+x_i})(\ln\sum_{i=1}^{5}x_i+a)$ 的最大值.

我们只看最后一小问，上一小问求出 $a=1-2\ln 2$. 于是题目如下：

$x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\geq 0$，满足 $\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2=4$. 求

$S=\left(\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{1+x_i}\right)\left(\ln\sum_{i=1}^{5}x_i+1-2\ln 2\right)$

的最大值.

解答（PDF 中已展开）

解答：

取 $x_1=0$，$x_2=x_3=x_4=x_5=1$ 得 $S=3$. 下证 $S\leq 3$，从而 S 的最大值为 3.

记 $T=\sum\limits_{i=1}^{5}x_i$，则由

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{1+x_i}\\=&5-\sum_{i=1}^{5}\frac{x_i}{1+x_i}\\\leq&5-\frac{\left(\sum_{i=1}^{5}x_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{5}(1+x_i)}\\=&5-\frac{T^2}{T+4}\end{aligned}$$

$\ln\sum_{i=1}^{5}x_i+1-2\ln 2=\ln\frac{T}{4}+1\leq\frac{T}{4}$

只需证：

$$\begin{aligned}&\left(5-\frac{T^2}{T+4}\right)\cdot\frac{T}{4}\leq 3\\\Longleftrightarrow\ &12(T+4)-T(5(T+4)-T^2)\geq 0\\\Longleftrightarrow\ &(T+3)(T-4)^2\geq 0\end{aligned}$$

显然成立，证毕.

下面是 2025 年广东省高联预赛加试第 2 题：

已知非负实数 $x_1, x_2, \cdots, x_5$ 满足 $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_5^2 = 4$. 求下列表达式的最大值:

$$S = \left(\sum_{i=1}^{5} \frac{1}{x_i + 1}\right)\left(\sum_{i=1}^{5} x_i\right).$$