2024 年中科大少创班科学营第二阶段数学试题

2024-04-23 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_3025d4ea4b9ae3fa

2024 年中科大少创班科学营第二阶段数学试题

2024 年 4 月 20 日上午

9:00—10:00 播放学习视频

10:00—11:30 测试

解答题（共 5 题，每小题 20 分，计 100 分）

1. 在 n 维数组空间 $\mathbb{R}^n$ 中，可以定义距离 $d_2(x,y)=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$.
   (1) 对 $n=2$ 的情形，证明 d_2 是 $\mathbb{R}^n$ 上的距离.
   (2) 定义距离 $d_1=\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i-y_i|$，$d_\infty=\max\limits_{i=1,\cdots,n}\{|x_i-y_i|\}$，证明：$d_1,d_2,d_\infty$ 是等价距离.

2. 设有限集 $A=\{1,2,\cdots,q\}$, 定义集合 $X=A^n$. 在集合 X 上定义两个元素 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 和 $y=(y_1,\cdots,y_n)$ 的汉明距离 $d(x,y)=\#\{i\in A\mid x_i\neq y_i\}$.
   (1) 证明：已知正整数 $r\leq n$，则集合 $\{y\in X\mid d(x,y)\leq r\}$ 的元素个数为 $\sum\limits_{i=0}^{r}(q-1)^i\mathrm{C}_n^i$.
   (2) 证明恒等式：$q^n=\sum\limits_{i=0}^{n}(q-1)^i\mathrm{C}_n^i$，只允许使用第（1）问的结论.
   (3) 设 X 的子集 C 有 M 个元素，满足条件：(i) C 中任意两个元素的距离不小于 r；(ii) C 是满足条件的最大子集，证明不等式

$$M\geq\frac{q^n}{\sum_{i=0}^{r-1}(q-1)^i\mathrm{C}_n^i}.$$

1. 证明以下结论：
   (1) 单点集 $\{x_0\}$ 是闭集.
   (2) 任意个开集的并仍是开集.
   (3) 有限个开集的交仍是开集.
   (4) 在有理数集 $\mathbb{Q}$ 上定义 p-进距离，则 $\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}$ 不是闭集.

2. 回答下列问题：
   (1) 写出柯西序列的定义.
   (2) 已知 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 是距离空间 $\mathbb{R}$ 上的柯西序列，求证：$\{x_ny_n\}$ 也是 $\mathbb{R}$ 上的柯西序列.
   (3) 设 $\{x_n\}$ 是汉明空间上的柯西序列，求证：$\exists N\in\mathbb{Z}^*$，使得 $\forall n>N$，$x_n=x_N$.

3. 在有理数集 $\mathbb{Q}$ 上，定义 p-进距离 $d_p(x,y)=|x-y|_p$.

(1) 证明：不同的 p-进距离互不等价.

(2) 证明：在 p-进距离下 $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+p)^{p^n}=1$.

恩次方根
ENCIFANGGEN

2024 年中科大少创班科学营第二阶段数学试题

2024 年 4 月 20 日上午　9:00—10:00 播放学习视频　10:00—11:30 测试

解答题（共 5 题，每小题 20 分，计 100 分）

1. 在 n 维数组空间 $\mathbb{R}^n$ 中，可以定义距离 $d_2(x,y)=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$.

(1) 对 $n=2$ 的情形，证明 d_2 是 $\mathbb{R}^n$ 上的距离.

(2) 定义距离 $d_1=\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i-y_i|$，$d_\infty=\max\limits_{i=1,\cdots,n}\{|x_i-y_i|\}$，证明：$d_1,d_2,d_\infty$ 是等价距离.

2. 设有限集 $A=\{1,2,\cdots,q\}$，定义集合 $X=A^n$. 在集合 X 上定义两个元素 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 和 $y=(y_1,\cdots,y_n)$ 的汉明距离 $d(x,y)=\#\{i\in A\mid x_i\neq y_i\}$.

(1) 证明：已知正整数 $r\leq n$，则集合 $\{y\in X\mid d(x,y)\leq r\}$ 的元素个数为 $\sum\limits_{i=0}^{r}(q-1)^i\mathrm{C}_n^i$.

(2) 证明恒等式：$q^n=\sum\limits_{i=0}^{n}(q-1)^i\mathrm{C}_n^i$，只允许使用第（1）问的结论.

(3) 设 X 的子集 C 有 M 个元素，满足条件：(i) C 中任意两个元素的距离不小于 r；(ii) C 是满足条件的最大子集，证明不等式 $M\geq\dfrac{q^n}{\sum\limits_{i=0}^{r-1}(q-1)^i\mathrm{C}_n^i}$.

3. 证明以下结论：

(1) 单点集 $\{x_0\}$ 是闭集.

(2) 任意个开集的并仍是开集.

(3) 有限个开集的交仍是开集.

(4) 在有理数集 $\mathbb{Q}$ 上定义 p-进距离，则 $\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}$ 不是闭集.

4. 回答下列问题：

(1) 写出柯西序列的定义.

(2) 已知 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 是距离空间 $\mathbb{R}$ 上的柯西序列，求证：$\{x_ny_n\}$ 也是 $\mathbb{R}$ 上的柯西序列.

(3) 设 $\{x_n\}$ 是汉明空间上的柯西序列，求证：$\exists N\in\mathbb{Z}^*$，使得 $\forall n>N$，$x_n=x_N$.

5. 在有理数集 $\mathbb{Q}$ 上，定义 p-进距离 $d_p(x,y)=|x-y|_p$.

(1) 证明：不同的 p-进距离互不等价.

(2) 证明：在 p-进距离下 $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+p)^{p^n}=1$.

1