# 几道用线性代数解决的问题

2022-10-27 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_305c1d4dc8e99059

**线性无关：**称向量 $v_1$，$v_2$，$\cdots$，$v_n \in V$ 是线性无关的，如果 $c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n = 0$ 当且仅当 $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$.

1. **(Putnam 2003 B1)** 是否存在多项式 $a(x)$，$b(x)$，$c(x)$，$d(x)$，使得

$$1 + xy + x^2y^2 = a(x)c(y) + b(x)d(y)$$

恒成立?

**解答（PDF 中已展开）**

**解答：**

考虑由全体实系数多项式组成的线性空间 $\mathbb{R}[x]$，其一组基底为 $\{1, x, x^2, \cdots\}$.

若存在满足题意的多项式 $a(x)$，$b(x)$，$c(x)$，$d(x)$. 分别令 $y = -1$，$0$，$1$，得：

$$\begin{cases} c(-1)a(x) + d(-1)b(x) = 1 - x + x^2 \\ c(0)a(x) + d(0)b(x) = 1 \\ c(1)a(x) + d(1)b(x) = 1 + x + x^2 \end{cases}$$

即多项式 $1 - x + x^2$，$1$，$1 + x + x^2$ 均为 $a(x)$ 和 $b(x)$ 的线性组合，然而这三个多项式线性无关，故无法被 $a(x)$，$b(x)$ 两个多项式线性表出，矛盾!

因此不存在满足题意的多项式 $a(x)$，$b(x)$，$c(x)$，$d(x)$.

**注：**上述证明过程只要求 $a(x)$ 和 $b(x)$ 为多项式，$c(x)$ 和 $d(x)$ 可为任意函数.

1. $A = (a_{ij})$ 为一个 $n \times n$ 的矩阵，且满足对任意 $1 \le i \le n$，都有 $|a_{ii}| > \sum\limits_{j \ne i} |a_{ij}|$.

求证：$A$ 是可逆矩阵.

**解答（PDF 中已展开）**

**证明：**

即证 $A$ 的 $n$ 个列向量线性无关.

假设结论不成立，即存在不全为零的实数 $c_1$，$c_2$，$\cdots$，$c_n$，使得对任意 $i = 1$，$2$，$\cdots$，$n$，都有

$$\sum_{j=1}^{n} c_j a_{ij} = 0$$

特别地，取 $i$ 使得 $|c_i| = \max\{|c_1|, \cdots, |c_n|\}$. 于是

$$\begin{aligned}|a_{ii}| =& \left|\sum_{j\neq i} \frac{c_j}{c_i} a_{ij}\right| \\ \leq& \sum_{j\neq i} \frac{|c_j|}{|c_i|} |a_{ij}| \\ \leq& \sum_{j\neq i} |a_{ij}| \\ <& |a_{ii}|\end{aligned}$$

矛盾！于是原结论成立.

**注：**这样的矩阵称为对角占优矩阵.

1.（奇数镇）设一个小镇有 $n$ 位居民和 $m$ 个俱乐部. 每个俱乐部有奇数个成员，任意两个不同俱乐部之间有偶数个公共成员. 求证：$m \leq n$.

**解答（PDF 中已展开）**

**分析：**这里要处理的是 mod2 的问题，所以我们考虑只有 2 个元素的数域 $\mathbb{F}_2$.

**证明：**

对任意 $i = 1, 2, \cdots, m$，以 $v_i \in \mathbb{F}_2^n$ 表示居民和第 $i$ 个俱乐部的关系，即 $v_i$ 的第 $j$ 个元素为 1 当且仅当第 $j$ 个居民在俱乐部 $i$ 中，$v_i$ 的第 $j$ 个元素为 0 当且仅当第 $j$ 个居民不在俱乐部 $i$ 中.

于是 $v_i$ 和 $v_i$ 的内积 $v_i \cdot v_i$ 即为第 $i$ 个俱乐部的成员数，$v_i$ 和 $v_j$ 的内积 $v_i \cdot v_j$ 即为第 $i$ 个俱乐部和第 $j$ 个俱乐部的公共成员数.

于是由每个俱乐部有奇数个成员知，对任意 $i$，在 $\mathbb{F}_2$ 中，$v_i \cdot v_i = 1$. 由任意两个不同俱乐部之间有偶数个公共成员知，对任意 $i \neq j$，在 $\mathbb{F}_2$ 中，$v_i \cdot v_j = 0$.

下证：$v_1, v_2, \cdots, v_m$ 线性无关.

若存在 $c_1, c_2, \cdots, c_m \in \mathbb{F}_2$，使得

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_m v_m = 0$$

与 $v_i$ 作内积知：

$$\begin{aligned}0 =& v_i \cdot (c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_m v_m) \\ =& c_i v_i \cdot v_i + \sum_{j\neq i} c_j v_i \cdot v_j \\ =& c_i\end{aligned}$$

于是对任意 $i = 1, 2, \cdots, m$，都有 $c_i = 0$，这就说明了 $v_1, v_2, \cdots, v_m$ 线性无关.

于是 $v_1, v_2, \cdots, v_m$ 为 $n$ 为线性空间中 $m$ 个线性无关的向量，故 $m \leq n$.

1. 设 $k$ 为正整数. 一个小镇中有 $n$ 个居民，$m$ 个俱乐部. 每两个不同俱乐部之间恰有 $k$ 个公共成员. 求证：$m \leq n$.

**解答（PDF 中已展开）**

**证明：**

设 $\{0,1\}$ 向量 $v_1$，$v_2$，$\cdots$，$v_m \in \mathbb{R}^n$，满足 $v_i$ 的第 $j$ 个元素为 1 当且仅当第 $j$ 个居民在俱乐部 $i$ 中，$v_i$ 的第 $j$ 个元素为 0 当且仅当第 $j$ 个居民不在俱乐部 $i$ 中.

于是对任意 $i \neq j$，都有 $v_i \cdot v_j = k$.（这就是本题不再在 $\mathbb{F}_2$ 中考虑的原因）

下证：$v_1$，$v_2$，$\cdots$，$v_m$ 线性无关.

否则，若存在不全为零的 $c_1$，$c_2$，$\cdots$，$c_m \in \mathbb{R}$，使得

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_m v_m = 0$$

则

$$\begin{aligned}
0 =& (c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_m v_m)^2 \\
=& \sum_{i=1}^{m} c_i^2 v_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq m} c_i c_j v_i \cdot v_j \\
=& \sum_{i=1}^{m} c_i^2 |v_i|^2 + 2k \sum_{1 \leq i < j \leq m} c_i c_j \\
=& \sum_{i=1}^{m} c_i^2 (|v_i|^2 - k) + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} c_i c_j \\
=& \sum_{i=1}^{m} c_i^2 (|v_i|^2 - k) + \left( \sum_{i=1}^{m} c_i \right)^2
\end{aligned}$$

由于任意两个不同俱乐部之间恰有 $k$ 个公共成员，每个俱乐部均至少有 $k$ 个成员，即对任意 $i$，都有 $|v_i|^2 \geq k$.

于是 $\sum_{i=1}^{m} c_i^2 (|v_i|^2 - k) + \left( \sum_{i=1}^{m} c_i \right)^2$ 非负，即上面的不等式等号恰好成立.

由于 $c_1$，$c_2$，$\cdots$，$c_m$ 不全为零，且 $c_i^2 \geq 0$，故存在某个 $i$，使得 $|v_i|^2 - k = 0$，即第 $i$ 个俱乐部恰有 $k$ 个成员. 因此其余俱乐部和第 $i$ 个俱乐部的公共成员恰为第 $i$ 个俱乐部中的 $k$ 个成员，并且两两之间不再有其它公共成员.

于是剩余 $n-k$ 个居民至多属于一个俱乐部，因此至多还有 $n-k$ 个俱乐部.

俱乐部总数 $m \leq n - k + 1 \leq n$.