几道 2021HMMT 春季赛团体赛题目的解答

2021-04-15 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_30827e0ed9e0ad62

这是昨天发的 2021 哈佛麻省数学竞赛春季赛团体赛中几道题的解答. 如有更好做法，欢迎交流.

第 1 题（40 分）正整数 a，b 满足 $a>b$. 已知

$$\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$$

为整数.

(1) 是否 $\sqrt{a}$ 一定为整数?

(2) 是否 $\sqrt{b}$ 一定为整数?

分析这题比较简单，注意到原式平方后有比较好的结果. 结合 “$\sqrt{n}$ 为有理数，则必为整数” 这一结论即可.

解答（PDF 中已展开）

解答（1）由题意知

$$\begin{aligned}&\left(\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)^2\\=&\sqrt{a}+\sqrt{b}+2\sqrt{a-b}+\sqrt{a}-\sqrt{b}\\=&2\sqrt{a}+2\sqrt{a-b}\end{aligned}$$

为整数，设为 n.

于是

$$2\sqrt{a-b}=n-2\sqrt{a}$$

即

$$4(a-b)=n^2-4n\sqrt{a}+4a$$

也即

$$4n\sqrt{a}=n^2+4b$$

于是 $\sqrt{a}$ 为有理数，故为整数.

(2) 答案是否定的. 例如

$$\begin{aligned}&\sqrt{\sqrt{36}+\sqrt{32}}+\sqrt{\sqrt{36}-\sqrt{32}}\\=&2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}\\=&4\end{aligned}$$

而 $\sqrt{32}$ 不为整数.

第 3 题（50 分）已知 m 为正整数，证明存在正整数 n，使得以下 $2m+1$ 个整数均为正合数：2^n-m，$2^n-(m-1)$，$\cdots$，$2^n+(m-1)$，2^n+m.

解答（PDF 中已展开）

分析这题的构造的关键是对每个数取一个不同的素因子，用 Fermat 小定理进行处理.

解答令

$$n=m+1+\prod_{i=-m}^{m}\varphi\left(2^{m+1}+i\right)$$

对于任意 $-m\le i\le m$，设 q_i 为 $2^{m+1}+i$ 的一个素因子.

由欧拉函数的积性有

$$q_i-1|\varphi\left(2^{m+1}+i\right)$$

设

$$\prod_{i=-m}^{m}\varphi\left(2^{m+1}+i\right)=k_i\cdot(q_i-1)$$

于是

$$\begin{aligned}2^n+i&=2^{m+1}\cdot\left(2^{q_i-1}\right)^{k_i}+i\\&\equiv 2^{m+1}+i\\&\equiv 0(\mathrm{mod}\ q_i)\end{aligned}$$

又 $2^n+i>2^{m+1}+i\ge q_i$，故 2^n+i 为合数. 从而构造了连续 $2m+1$ 个合数.

第 4 题（50 分）已知 n，k 为正整数，设

$$S=\{(a_1,\cdots,a_k)\in\mathbb{Z}^k|0\le a_k\le\cdots\le a_1\le n,a_1+\cdots+a_k=k\}$$

求值（用 n，k 表示）：

$$\sum_{(a_1,\cdots,a_k)\in S}C_n^{a_1}\cdot C_{a_1}^{a_2}\cdot C_{a_2}^{a_3}\cdots C_{a_{k-1}}^{a_k}$$

解答（PDF 中已展开）

分析考虑这个式子的组合意义.

解答考虑一个 k 行 n 列的正方形网格，在其中取出 k 个小正方形.

设第 i 行中被取出了 a_i 个小正方形，第 j 列中被取出了 b_j 个小正方形. 于是有

$$\begin{aligned}k&=a_1+a_2+\cdots+a_k\\&=b_1+b_2+\cdots+b_n\end{aligned}$$

令取出的 k 个小正方形满足：除最后一行外，其余所有被选出的小正方形下方的小正方形均也被选出. 于是

$$0\le a_k\le\cdots\le a_1\le n$$

这样

$$\sum_{(a_1,\cdots,a_k)\in S}C_n^{a_1}\cdot C_{a_1}^{a_2}\cdot C_{a_2}^{a_3}\cdots C_{a_{k-1}}^{a_k}$$

即为该组合问题的方法总数.

接下来按列选出这 k 个小正方形，注意到每一列的小正方形个数确定后，其位置也随之确定（从底部向上的连续若干个小正方形）. 于是方法数为

$$b_1+b_2+\cdots+b_n=k$$

的非负整数解的组数，即为 C_{k+n-1}^{n-1}

.

第 5 题（70 分）一个凸多面体的每个面都是全等的三角形，且这个三角形的三个顶角的度数为 $36°$，$72°$，$72°$. 求这个多面体的面的个数的最大值.

解答（PDF 中已展开）

分析用算两次得到这个多面体面数和棱数的关系，再由每个顶点处的内角和小于 360° 得到面数与顶点数的关系．代入欧拉定理 $V+F=E+2$ 即可．

解答设这个多面体有 V 个顶点，F 个面，E 条棱．由欧拉定理：

$$V+F=E+2$$

注意到每个面有 3 条棱，而每条棱被计算 2 次，因此有

$$3F=2E$$

注意到这是一个凸多面体，每个顶点处的内角之和必小于 360°．而每个内角的可能度数均为 36° 的整数倍，故每个顶点处的内角之和不超过 324°．因此 $180F\leq 324V$，即

$$5F\leq 9V$$

于是

$$5F\leq 9(E+2-F)=\frac{27}{2}F+18-9F$$

即

$$F\leq 36$$

$F=36$ 的情形容易构造，在此略去．

故这个多面体面数的最大值为 36．

第 6 题（70 分）函数 $f(x)=x^2+x+1$．求所有的正整数 n，使得对 n 的所有因数 k，均有 $f(k)$ 整除 $f(n)$．

解答（PDF 中已展开）

分析 n 的因数不会太多，所以先从素数开始考虑，再注意到 x^2+x+1 模 3 的性质，以及如下因式分解

$$x^4+x^2+1=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$$

即可得到答案．

解答满足题意的 n 为 1，所有模 3 余 1 的素数，以及除 3 以外的所有素数的平方.

首先证明 n 的因数个数不超过 3，否则存在两个因数 a 和 b，使得 $1<b<a<n$，且 $n=ab$.

由 $f(a)|f(n)$ 知 $f(a)|f(n)-f(a)$.

注意到

$$\begin{aligned}
&f(n)-f(a)\\
=&(n^2+n+1)-(a^2+a+1)\\
=&(n-a)(n+a+1)\\
=&(n-a)(a^2+a+1)+(n-a)(n-a^2)\\
=&(n-a)(a^2+a+1)+(ab-a)(ab-a^2)\\
=&(n-a)(a^2+a+1)+a^2(b-a)(b-a)
\end{aligned}$$

于是有

$$a^2+a+1|a^2(b-a)(b-1)$$

而

$$\gcd(a^2+a+1,a^2)=1$$

故

$$a^2+a+1|(a-b)(b-1)$$

由于 $1<b<a$，$(a-b)(b-1)>0$，且

$$(a-b)(b-1)<a^2<a^2+a+1$$

这是不可能的，于是 n 的因数个数不超过 3. 因此 n 只能为 1，素数，素数的平方.

考虑 $f(1)|f(n)$ 即 $3|n^2+n+1$. 有 n 模 3 余 1.

经验证，满足题意的 n 为 1，所有模 3 余 1 的素数，以及除 3 以外的所有素数的平方.