用 Binet-Cauchy 公式证明一道不等式

2023-04-27　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_30d7b3b24aeffdda

Binet-Cauchy（比内-柯西）公式[1]

Binet-Cauchy 公式　设 A 是数域 K 上 m×n 矩阵，B 是 K 上 n×m 矩阵，则

$$|AB|=\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_m\leqslant n}A\begin{Bmatrix}1&2&\cdots&m\\i_1&i_2&\cdots&i_m\end{Bmatrix}B\begin{Bmatrix}i_1&i_2&\cdots&i_m\\1&2&\cdots&m\end{Bmatrix}.$$

证　若 $m>n$，则因 $\mathrm{r}(A)\leqslant n$，有

$$\mathrm{r}(AB)\leqslant\min\{\mathrm{r}(A),\mathrm{r}(B)\}\leqslant n.$$

AB 为 m 阶方阵，故不满秩，应有 $|AB|=0$. 而此时

$$A\begin{Bmatrix}1&2&\cdots&m\\i_1&i_2&\cdots&i_m\end{Bmatrix}=0$$

（因 $i_1,i_2,\cdots,i_m$ 为 $\{1,2,\cdots,n\}$ 中的自然数，共 m 个，而 $m>n$，故其中必有两个相同）. 等式成立.

下面设 $m\leqslant n$. 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times m}$，则

$$|AB|=\begin{vmatrix}\sum\limits_{i_1=1}^{n}a_{1i_1}b_{i_11}&\sum\limits_{i_2=1}^{n}a_{1i_2}b_{i_22}&\cdots&\sum\limits_{i_m=1}^{n}a_{1i_m}b_{i_mm}\\\sum\limits_{i_1=1}^{n}a_{2i_1}b_{i_11}&\sum\limits_{i_2=1}^{n}a_{2i_2}b_{i_22}&\cdots&\sum\limits_{i_m=1}^{n}a_{2i_m}b_{i_mm}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\sum\limits_{i_1=1}^{n}a_{mi_1}b_{i_11}&\sum\limits_{i_2=1}^{n}a_{mi_2}b_{i_22}&\cdots&\sum\limits_{i_m=1}^{n}a_{mi_m}b_{i_mm}\end{vmatrix}$$

$$=\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\cdots\sum_{i_m=1}^{n}\begin{vmatrix}a_{1i_1}b_{i_11}&a_{1i_2}b_{i_22}&\cdots&a_{1i_m}b_{i_mm}\\a_{2i_1}b_{i_11}&a_{2i_2}b_{i_22}&\cdots&a_{2i_m}b_{i_mm}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{mi_1}b_{i_11}&a_{mi_2}b_{i_22}&\cdots&a_{mi_m}b_{i_mm}\end{vmatrix}$$

$$=\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\cdots\sum_{i_m=1}^{n}\begin{vmatrix}a_{1i_1}&a_{1i_2}&\cdots&a_{1i_m}\\a_{2i_1}&a_{2i_2}&\cdots&a_{2i_m}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{mi_1}&a_{mi_2}&\cdots&a_{mi_m}\end{vmatrix}b_{i_11}b_{i_22}\cdots b_{i_mm}.$$

如果 $i_1,i_2,\cdots,i_m$ 中有相同者，则上式中的行列式为 0. 对 $i_1i_2\cdots i_m$ 为 m个不同自然数的排列，利用行列式交换列时变号的性质把它们改换成按大小顺序排列列，于是

$$|AB|=\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_m\leqslant n}\sum_{(j_1j_2\cdots j_m)}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_m)}\begin{vmatrix}a_{1i_1}&a_{1i_2}&\cdots&a_{1i_m}\\a_{2i_1}&a_{2i_2}&\cdots&a_{2i_m}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{mi_1}&a_{mi_2}&\cdots&a_{mi_m}\end{vmatrix}b_{j_11}b_{j_22}\cdots b_{j_mm}$$

$$=\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_m\leqslant n}A\begin{Bmatrix}1&2&\cdots&m\\i_1&i_2&\cdots&i_m\end{Bmatrix}B\begin{Bmatrix}i_1&i_2&\cdots&i_m\\1&2&\cdots&m\end{Bmatrix}.$$

其中上面等式中的排列$(j_1j_2\cdots j_m)$是$i_1,i_2,\cdots,i_m$的一个排列，求和号是对所有可能的这种排列求和，按行列式的排列展开公式，有

$$\sum_{(j_1j_2\cdots j_m)}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_m)}b_{j_1 1}b_{j_2 2}\cdots b_{j_m m}=B\begin{Bmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_m\\ 1 & 2 & \cdots & m\end{Bmatrix}.$$

定理证毕. ▌

Binet-Cauchy 公式是一个有用的工具，下面举一个应用实例.

例 证明 Cauchy 恒等式：

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ic_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_id_i\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}a_id_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_ic_i\right)$$
$$=\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}(a_jb_k-a_kb_j)(c_jd_k-c_kd_j),$$

这里$n\geqslant 2$.

证 上面等式左端为

$$\begin{vmatrix}\sum_{i=1}^{n}a_ic_i & \sum_{i=1}^{n}a_id_i\\ \sum_{i=1}^{n}b_ic_i & \sum_{i=1}^{n}b_id_i\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1 & d_1\\ c_2 & d_2\\ \vdots & \vdots\\ c_n & d_n\end{bmatrix}\end{vmatrix}$$
$$=\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}\begin{vmatrix}a_j & a_k\\ b_j & b_k\end{vmatrix}\begin{vmatrix}c_j & d_j\\ c_k & d_k\end{vmatrix}$$
$$=\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}(a_jb_k-a_kb_j)(c_jd_k-c_kd_j).$$ ▌

现在我们用 Binet-Cauchy 公式证明一道不等式：

题目：

正整数 $n\geq 4$，非零实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足 $\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}=0$. 求证：

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i^2}\right)\left(\sum_{1\leq i<j\leq n}(a_i-a_j)^2\right)\geq n^3.$$

解答（PDF 中已展开）

证明：

考虑 $3\times n$ 矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_n}\end{pmatrix}$$

则

$$AA^T=\begin{pmatrix} n & \sum\limits_{i=1}^{n} a_i & \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{a_i} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_i & \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 & n \\ \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{a_i} & n & \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{a_i^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \sum\limits_{i=1}^{n} a_i & 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_i & \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 & n \\ 0 & n & \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{a_i^2} \end{pmatrix}$$

于是

$$\begin{aligned} &\det(AA^T) \\ =&n\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i^2}\right)-\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i^2}\right)-n^3 \\ =&\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i^2}\right)\left(\sum_{1\le i<j\le n}(a_i-a_j)^2\right)-n^3 \end{aligned}$$

于是只需证明:

$$\det(AA^T)\ge 0.$$

对任意 $1\le i<j<k\le n$，记

$$A_{i,j,k}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_i & a_j & a_k \\ \dfrac{1}{a_i} & \dfrac{1}{a_j} & \dfrac{1}{a_k} \end{pmatrix}$$

由 Binet-Cauchy 公式:

$$\begin{aligned} \det(AA^T)&=\sum_{1\le i<j<k\le n}\det A_{i,j,k}\det A_{i,j,k}^T \\ &=\left(\det A_{i,j,k}\right)^2\ge 0 \end{aligned}$$

证毕.

注:

本题从高等代数角度来看是非常平凡的，直接证明则稍复杂一些，读者可以尝试一下.

参考资料

[1]

来源: 蓝以中. 高等代数简明教程. 北京大学出版社.2007