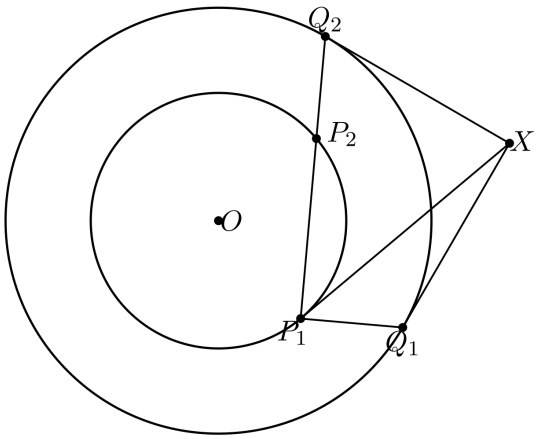
2021 年加拿大初中数学奥林匹克

2021-06-20 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_30ef88176e421992

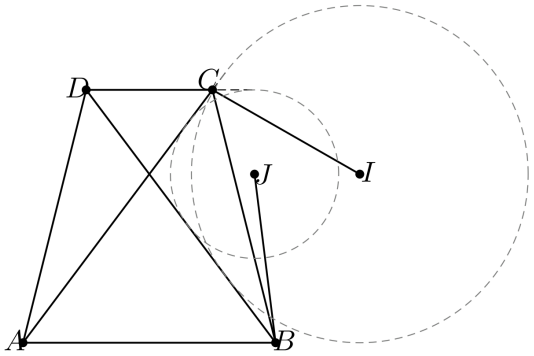
本次考试的第 3，4，5 题分别与 2021 加拿大数学奥林匹克-中文翻译中的第 1，2，4 题相同。

1. 设 C_1 和 C_2 为同心两圆，C_1 在 C_2 内部. P_1 和 P_2 为 C_1 上的两点，且 P_1P_2 不为直径. 延长 P_1P_2 交 C_2 于点 Q_2，C_2 在 Q_2 处的切线和 C_1 在 P_1 处的切线交于点 X. 过 X 作 C_2 的第二条切线切 C_2 于点 Q_1. 求证：P_1X 平分 $\angle Q_1P_1Q_2$.



2. 有多少种对前 n 个正整数的排列，使得对于任意正整数 $k \le n$，该排列的前 k 个数模 k 的余数互不相同?

3. 梯形 $ABCD$ 满足 $AB \parallel CD$，$AB > CD$，且边 $AD = BC$. 设 I 是与直线 AB，AC，BD 相切的圆的圆心，且 A 和 I 位于直线 BD 的两侧，设 J 是与直线 CD，AC，BD 相切的圆的圆心，且 D 和 J 位于直线 AC 的两侧. 证明：$IC = JB$.



4. 给定正整数 $n \geq 2$，正实数 a_1，a_2，$\cdots$，a_n 满足 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 2^n - 1$. 试确定

$$\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{1+a_1} + \frac{a_3}{1+a_1+a_2} + \cdots + \frac{a_n}{1+a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}$$

的最小可能值.

5. 如果函数 $f\colon \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ 满足对所有正整数 x，y 都有

$$\gcd(f(f(x)), f(x+y)) = \gcd(x, y),$$

那么这个函数被称作**加拿大的**. 求所有正整数 m, 使得对所有**加拿大的**函数 f, 都有 $f(m) = m$.

文末附上两道几何题的 tex 代码：(顺便凑字数)

```
\usepackage{tikz}
\usepackage{tkz-euclide}
//第 1 题
\begin{tikzpicture}
\tkzDefPoint(0,0){O}
\tkzDefPoint(-50:1.5){P_1}
\tkzDefPoint(40:1.5){P_2}
\tkzDefPoint(0:1.5){C_1}
\tkzDefPoint(0:2.5){C_2}
\tkzInterLC(P_1,P_2)(O,C_2)\tkzGetFirstPoint{Q_2}
\tkzDefTangent[at=Q_2](O)\tkzGetPoint{q}
\tkzDefTangent[at=P_1](O)\tkzGetPoint{p}
```

```
\tkzInterLL(Q_2,q)(P_1,p)\tkzGetPoint{X}
\tkzDefTangent[from=X](O,C_2)\tkzGetPoints{Q_2}{Q_1}
\tkzDrawSegments(P_1,Q_2 P_1,X P_1,Q_1 X,Q_1 X,Q_2)
\tkzDrawCircle(O,C_1)
\tkzDrawCircle(O,C_2)
\tkzLabelPoints[below](P_1,Q_1)
\tkzLabelPoints[right](X)
\tkzLabelPoints[left](P_2,Q_2)
\end{tikzpicture}

//第 3 题
\begin{tikzpicture}
\tkzDefPoints{-2/-3/A,2/-3/B,1/1/C,-1/1/D}
\tkzInterLL(A,C)(B,D) \tkzGetPoint{E}
\tkzDefTriangleCenter[ex](B,A,E)\tkzGetPoint{I}
\tkzDefPointBy[projection = onto A--B](I) \tkzGetPoint{I_1}
\tkzDefPointBy[projection = onto A--C](I) \tkzGetPoint{I_2}
\tkzDefTriangleCenter[ex](C,D,E)\tkzGetPoint{J}
\tkzDefPointBy[projection = onto D--B](J) \tkzGetPoint{J_1}
\tkzDefPointBy[projection = onto D--C](J) \tkzGetPoint{J_2}
\tkzDrawSegments(A,I_1 B,C J_2,D D,A A,I_2 B,D I,C J,B)
\tkzDrawCircle[dashed](I,I_1)
\tkzDrawCircle[dashed](J,J_1)
\tkzLabelPoints[below](A,B)
\tkzLabelPoints[above](C,D)
\tkzLabelPoints[right](I,J)
\end{tikzpicture}
```