2022 年巴西数学奥林匹克（初级组）

2022-11-24　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_3211b2c4a0177d38

第一天

一个单人游戏的规则如下：起初，有 10 堆石子，每堆各有 $1, 2, \cdots, 10$ 枚石子．每次进行以下操作之一：
(i) 选择两堆石子数不少于 2 的石子，将它们合并，并在新石堆中再放入 2 枚石子；
(ii) 选择一堆石子数不少于 4 的石子，从里面取出 2 枚石子，再将它分成两堆，每堆的石子数由玩家决定．
当无法执行任何操作时，游戏结束．
a) 举例说明导致游戏结束的一个操作序列．
b) 将上述例子中前五次操作中的石头总数和堆数列成表格．
c) 不论之前怎么执行操作，在游戏结束时，总有两堆石子数量相同．

非零实数 a，b，c 满足

$$\begin{cases} a+ab=c \\ b+bc=a \\ c+ca=b \end{cases}$$

求 abc 的所有可能值．

1. 设 $\triangle ABC$ 的内心为 I，外接圆为 Γ，M 为 BC 中点，K 为外接圆上弧 BC（不含点 A）的中点，L 为外接圆上弧 BC（包含点 A）的中点，J 为 I 关于 KL 的对称点．直线 LJ 和 Γ 再次交于点 T，直线 TM 和 Γ 再次交于点 S．求证：S，I，M，K 四点共圆．

第二天

1. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=BC$，内切圆为 ω，M 为 BC 中点．P、Q 分别为 AB、AC 上一点，且满足 $PQ \parallel BC$，PQ 和 ω 相切，$\angle CQM=\angle PQM$．已知 $AQ=1$，求 $\triangle ABC$ 的周长．

2. 起初，黑板上写有一个自然数 n．每一分钟，内马尔选取 n 的一个约数 d（$d>1$），擦去 n，然后写上 $n+d$．如果开始黑板上的数为 2022，那么内马尔永远无法在黑板上写出的最大合数是多少?

3. 求满足以下条件的正整数 k 的最大值：给定集合 $\{1, 2, \cdots, 2023\}$ 的 k 个互异的 1011 元子集，总能将这些子集分为两组，每一组内的任意两个子集交集非空．

点击 “阅读原文” 讨论题目．