2025 年大湾区数学一模多选压轴

2025-01-15　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_32b9d4768eebee3b

11. 设曲线 $C_1: y=e^x$，抛物线 $C_2: y^2=2px(p>0)$，记抛物线的焦点为 F，M，Q 为分别为曲线 C_1，C_2 上的动点，l 为曲线 C_1 的切线，则

A. 若 C_1 与 C_2 无公共点，则 $p\in(0,e)$

B. 若 l 过点 F，则 l 被 C_2 截得的弦长为 $p+\frac{2}{e^{p+2}}$

C. 当 $p=1$ 时，$|FM|\geq\frac{\sqrt{5}}{2}$

D. 当 $p=1$ 时，$|MQ|>\frac{\sqrt{2}}{4}$

这是前两天刚考的大湾区数学一模多选压轴题，其中 ABC 选项比较常规，不少同学对 D 选项有困惑，这里写一个解答.

（很多同学在考场上判断出 A 正确，BC 错误后，也能选出正确答案 AD，所以作为多选题还是不难的）

设 $M(s,e^s)$，$Q(2t^2,2t)$，则

$$\begin{aligned}2|MQ|^2=&2\left((s-2t^2)^2+(e^s-2t)^2\right)\\ \geq&\left(2t^2-s+e^s-2t\right)^2\\ \geq&\left(-\frac{1}{2}+1\right)^2=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

第一个不等号为 Cauchy 不等式，第二个不等号用到了

$2t^2-2t\geq-\frac{1}{2}, e^s\geq s+1$

等号无法同时成立，于是 $|MQ|>\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

注：此解法的几何意义是找出 C_1 和 C_2 平行的切线（C_1 的切线过 $(0,1)$，C_2 的切线过 $\left(\frac{1}{2},1\right)$）.